

TD24 : Équations différentielles

Exercice 1 (Mines-Télécom PSI 2024)

Déterminer les solutions sur $]0, 1[$ et $]1, +\infty[$ de l'équation différentielle $(x \ln x)y' - (3 \ln x + 1)y = 0$ puis par recollement les solutions sur $]0, +\infty[$.

Exercice 2 (CCINP PSI 2024)

Soit $(\mathcal{E}) : xy' + \lambda y = \frac{1}{1+x}$ avec $\lambda > 0$

1. Résoudre l'équation homogène sur $\mathbb{R}^{+*}$
2. Donner la forme générale des solutions de $(\mathcal{E})$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ à l'aide d'une intégrale
3. Montrer qu'il existe une unique solution de $(\mathcal{E})$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ bornée au voisinage de 0.

Exercice 3 (CCP PSI 2022)

1. Donner les éléments propres de $A(t) = \begin{pmatrix} 1-3t & 4t \\ -2t & 1+3t \end{pmatrix}$. Si A est diagonalisable, donner une matrice de passage P .
2. Résoudre $Y'(t) = A(t)Y(t)$.

Exercice 4 (Mines-Télécom PSI 2024)

1. Donner les solutions polynomiales de $(x^2 - 1)y''(x) + 2xy' - 2y = 0$.
2. On pose $y(x) = xz(x)$; trouver une équation différentielle vérifiée par z
3. Déterminer a, b, c tels que $\frac{2-4x^2}{x(x^2-1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x+1}$; en déduire z puis résoudre l'équation initiale sur $] -1, 1[$.

Exercice 5 (Mines-Télécom PSI 2024)

Soit (E) l'équation différentielle $x^2y'' + 4xy' + 2y = \frac{1}{1-x}$ sur $]0, 1[$

1. Déterminer les solutions de l'équation homogène de la forme $x \mapsto x^\alpha$. En déduire les solutions de l'équation homogène.
2. Donner le développement en série entière de $x \mapsto \frac{1}{1-x}$
3. Déterminer les solutions de (E)

Exercice 6 (CCINP PSI 2024)

Soit $(E) : t^2y''(t) + 3ty'(t) + y(t) = t + \frac{1}{t}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$

1. Énoncer le théorème de Cauchy-Lipschitz
2. On pose $g(x) = f(e^x)$. Montrer que f est solution de (E) si et seulement si g est solution d'une équation différentielle à déterminer.
3. Résoudre (E) sur $\mathbb{R}^{+*}$

Exercice 7 (Centrale PSI 2019)

Soit $(E) : y'' + \varphi(t)y = 0$ où φ est continue sur $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles.

1. Résoudre (E) dans le cas où φ est constante.
2. Soient f et g continues sur $[a, +\infty[$, g positive, telle que $\forall t \in [a, +\infty[, f(t) \leq M + \int_a^t f(u)g(u) du$.

On pose $F(t) = M + \int_a^t f(u)g(u) du$ et $G(t) = \exp\left(\int_a^t g(u) du\right)$.

En calculant la dérivée de $\frac{F}{G}$, montrer que $\forall t \in [a, +\infty[, f(t) \leq M \exp\left(\int_a^t g(u) du\right)$.

3. On suppose que $t \mapsto t\varphi(t)$ est intégrable sur $[a, +\infty[$. Soit y une solution de (E) .
 - a) Justifier qu'il existe une fonction affine A telle que $y(t) = A(t) - \int_a^t (t-u)y(u)\varphi(u) du$. (*)
 - b) En déduire que $t \mapsto \frac{y(t)}{t}$ est bornée sur $[a, +\infty[$ avec $a > 0$

Indications

Exercice 7

3.a Poser $z(t) = y(t) + \int_a^t (t-u)y(u)\varphi(u) du$ et calculer z'' .