

CORRIGE CENTRALE PSI 2011 - ACTIVITES PHYSIQUES

Corrigé proposé par :

Nicole ADLOFF (nicole.adloff0212@orange.fr)

et Marc STRUBEL (marc.strubel@wanadoo.fr)

Merci de nous faire part de vos remarques et commentaires !

I. Physique du skimboard :

Remarque : l'angle α étant petit, on prendra $\cos\alpha = 1$; $\sin\alpha = \tan\alpha = \alpha$.

Tous les calculs seront menés au premier ordre en α .

I.A.1.a) Le fluide étant incompressible, on a conservation du débit volumique, ce qui s'écrit entre x ($x_A < x < x_T$) et x_T :

$$L \cdot h(x) \cdot v(x) = L \cdot h_T \cdot v(h_T).$$

En supposant que $v(h_T) = V$, on obtient :

$$\boxed{h(x) \cdot v(x) = h_T \cdot V}.$$

b) L'équation locale s'écrit dans le cas du fluide incompressible : $\text{div}(\vec{v}) = 0$;

on en déduit :

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0.$$

Si l'on considère $v_z = 0$, cette relation conduit à $\boxed{v(x) = V}$

Le paradoxe est levé si l'on considère que $v_z \neq 0$, avec en ordre de grandeur $\frac{\partial v_x}{\partial x} \approx \frac{v_x}{l_m}$ et $\frac{\partial v_z}{\partial z} \approx \frac{v_z}{h_T - h_A}$;

on a donc bien $v_z \approx \alpha \cdot v_x \ll v_x$, mais $v_x (h_T - h_A) = v_z \cdot l_m \neq 0$.

c) On calcule $\vec{\text{rot}}(\vec{v}) = \vec{0}$; l'écoulement est irrotationnel.

d) On est dans le cas d'un écoulement stationnaire irrotationnel dans lequel la pesanteur est négligée, donc :

$$\boxed{P + \frac{1}{2} \rho v^2 = \text{cte en tout point du fluide}}.$$

Démonstration cf cours

2.a) On applique le théorème entre l'abscisse x et l'abscisse x_T , d'où :

$$P(x) + \frac{1}{2} \rho v(x)^2 = P_0 + \frac{1}{2} \rho V^2$$

En utilisant la relation de 1a), on a :

$$p(x) - p_0 = \frac{1}{2} \rho V^2 - \frac{1}{2} \rho [h_T V / h(x)]^2 = \frac{1}{2} \rho V^2 [1 - h_T^2 / h^2(x)]$$

b) $\tan(\alpha) = \alpha = \frac{h - h_T}{x_T - x}$, soit $\boxed{h(x) = h_T + \alpha(x_T - x)}$.

Remarque : $h_A = h_T + \alpha \cdot l_m$.

$$c) F_z = \int_{x_A}^{x_T} (p(x) - p_0) \cdot L \cdot dx \cdot \cos \alpha = \frac{1}{2} \rho V^2 L \int_{x_A}^{x_T} \left(1 - \frac{h_T^2}{h_T^2 (1 - \alpha \frac{x - x_T}{h})^2}\right) \cdot dx \cdot \cos \alpha$$

avec $\alpha \left(\frac{x - x_T}{h}\right) \ll 1$

$$= \frac{1}{2} \rho V^2 L \int_{x_A}^{x_T} (1 - (1 + 2\alpha \frac{x - x_T}{h_T})) dx \cos \alpha \text{ au premier ordre}$$

$$= \frac{1}{2} \rho V^2 L \int_{x_A}^{x_T} (1 - (1 + 2\alpha \frac{x - x_T}{h_T})) dx \cos \alpha = \frac{1}{2} \rho V^2 L \alpha \frac{(x_A - x_T)^2}{h_T} \cos \alpha = \frac{1}{2} \rho V^2 L \alpha \frac{(x_A - x_T)^2}{h_T} \cos \alpha$$

avec $x_T - x_A = l_m \cos \alpha = l_m$, et $\alpha = \frac{h_A - h_T}{l_m}$

$$= \frac{1}{2} \rho V^2 L \frac{h_A - h_T}{l_m} \frac{(l_m)^2}{h_T} = \frac{1}{2} \rho V^2 L l_m \frac{h_A - h_T}{h_T} = \frac{1}{2} \rho V^2 L l_m \frac{h_A - h_T}{h_A} \text{ au premier ordre.}$$

On a donc $\lambda = \frac{h_T}{h_A}$.

$$F_x = F_z \tan(\alpha) = \frac{1}{2} \rho V^2 L h_A (1 - \lambda)^2.$$

d) $d\vec{M} = \vec{TM} \wedge d\vec{F} = \frac{x - x_T}{\cos \alpha} \cdot (p(x) - p_0) dx \cdot L \cdot (-\vec{u}_y) = (x_T - x) \cdot \frac{1}{2} \rho V^2 [1 - \frac{h_T^2}{h^2(x)}] dx \cdot L \cdot \vec{u}_y$

soit $K = \frac{1}{2} \rho \cdot L \cdot V^2$.

e) Si l'on ne veut pas que la planche pivote, le moment du poids du sportif par rapport à T doit être opposé au moment précédent, soit : $\vec{M}(P) \cdot \vec{u}_y = -mg \cdot l_p \cos \alpha = -M = -\frac{1}{4} \rho V^2 L l_m f(\lambda)$

Je n'ai pas de meilleure relation (?).

A.3) a) $P_x(t+dt) - P_x(t) = dm \cdot V - dm \cdot v(x_A) = dm \cdot V \cdot (1 - \lambda)$

D'où $\frac{dP_x}{dt} = \frac{dm}{dt} \cdot V \cdot (1 - \lambda) = \rho \cdot V \cdot L \cdot h_T \cdot V \cdot (1 - \lambda)$.

b) Les composantes selon Ox des forces appliquées au système considéré sont :

- $-F_x$, force exercée par la planche sur l'eau, opposée à la force exercée par l'eau sur la planche ;
- Les forces de pression en x_A et x_T .

La pesanteur étant négligée, et la vitesse uniforme sur chaque section, on a $P(x_T) = P_0$.

Les forces de pression s'expriment : $(P_A \cdot h_A \cdot L - P_0 \cdot h_T \cdot L) = (P_A - P_0) \cdot h_A \cdot L$ à l'ordre le plus bas.

On a donc pour résultante $(P_A - P_0) \cdot h_A \cdot L - F_x$.

c) Le théorème du centre de masse s'écrit $\frac{dP_x}{dt} = (P_A - P_0) \cdot h_A \cdot L - F_x$; on en déduit :

$$F_x = (P_A - P_0) \cdot h_A \cdot L + \rho \cdot V \cdot L \cdot h_T \cdot V \cdot (1 - \lambda) = \frac{1}{2} \rho V^2 L h_A \cdot (1 - \lambda^2) - \rho V^2 L h_T \cdot (1 - \lambda)$$

$$F_x = \frac{1}{2} \rho V^2 L h_A \cdot (1 - \lambda)^2.$$

On retrouve bien l'expression obtenue à la question 2.c). et on obtient $F_z = F_x / \alpha$.

B.1) On considère le système {planche+ sportif}, de vitesse $\vec{V} = -V \cdot \vec{u}_x$; ce système est soumis :

- A son poids ;
- A la force F calculée précédemment.

On donc selon Ox : $m \frac{d(-V)}{dt} = F_x$

Et selon Oz : $0 = -mg + F_z$ avec $F_x = \alpha \cdot F_z$.

On déduit de ces deux relations : $m \frac{dV}{dt} = -F_x = -\alpha \cdot F_z = -\alpha \cdot mg$, soit : $\frac{dV}{dt} = -\alpha \cdot g$.

B.2.a) On a $mg = F_z = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot V^2 \cdot L \cdot l_m (1 - \lambda) = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot V^2 \cdot L \cdot l_m \frac{\alpha \cdot l_m}{h_A} = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot V^2 \cdot L \cdot l_m^2 \frac{\alpha}{h_T}$ au premier ordre.

On en déduit : $l_m = \frac{1}{V} \cdot \sqrt{\frac{2mgh_T}{\alpha \cdot \rho \cdot L}}$.

L'allure est bien celle de la figure 3.

b) l_m doit être inférieure à la longueur L' de la planche ; cela impose une valeur minimale à V .

c) L'intégration de la relation obtenue en B.1 fournit : $V(t) = V_0 - \alpha \cdot g \cdot t$ et $x(t) = \frac{1}{2} \cdot g \cdot \alpha \cdot t^2 - V_0 \cdot t$ en supposant $x(0) = 0$, et en posant $V = -dx/dt$; le skimboard s'arrête au bout d'une durée $t = V_0/\alpha \cdot g$; la distance

parcourue vaut alors $D = \frac{V_0^2}{2 \cdot \alpha \cdot g} = 10,4 \text{ m}$.

L'ordre de grandeur semble correct.

B.3) On néglige essentiellement les forces de viscosité, notamment de l'air sur le sportif.

C.1) On suppose à nouveau le régime stationnaire dans le référentiel R.

Le jet étant incompressible, son épaisseur est constante et vaut δ .

La variation de quantité de mouvement de la couche « hors jet » d'épaisseur h_T est nulle ; la seule variation de quantité de mouvement est dans le jet, d'où :

$$dP_x = \rho \cdot \delta \cdot L \cdot V \cdot dt (-V - V) = -2 \cdot \rho \cdot \delta \cdot L \cdot V^2 \cdot dt.$$

soit $\frac{dP_x}{dt} = -2 \cdot \rho \cdot \delta \cdot L \cdot V^2$

C.2) Les forces de pression sur les cotés de hauteur h_T s'annulent ; si l'on néglige les forces de pression exercées sur les deux hauteurs δ , la seule force à prendre en compte est $-F_x$, composante selon x de la force exercée par la planche. On a donc :

$$-2 \cdot \rho \cdot \delta \cdot L \cdot V^2 = -F_x = -F_z \cdot \alpha.$$

On en déduit $F_z = 2 \cdot \rho \cdot \delta \cdot L \cdot V^2 / \alpha$.

C.3) On sait que $F_z = mg$; on déduit donc de la question précédente :

$$\delta = m \cdot g \cdot \alpha / 2 \cdot \rho \cdot L \cdot V^2$$

AN : $\delta = 2 \text{ mm}$, qui semble un ordre de grandeur correct.

II. Physique des ricochets :

II.A.

II.A.1) $S_{im} = -za / \sin\theta$.

II.A.2) On applique le pfd au galet : $m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{g} + \vec{F}$

sur Ox : $m \ddot{x}_G = \frac{1}{2} C_n \rho v^2 \left(-\frac{za}{\sin\theta} \right) (-\sin\theta) + \frac{1}{2} C_t \rho v^2 \left(-\frac{za}{\sin\theta} \right) (-\cos\theta) = \frac{1}{2\sin\theta} \rho v^2 za (C_n \sin\theta + C_t \cos\theta)$

sur Oz : $m \ddot{z}_G = \frac{1}{2} C_n \rho v^2 \left(-\frac{za}{\sin\theta} \right) (\cos\theta) + \frac{1}{2} C_t \rho v^2 \left(-\frac{za}{\sin\theta} \right) (-\sin\theta) - mg$

$m \ddot{z}_G = -\frac{1}{2} \rho v^2 \frac{za}{\sin\theta} (C_n \cos\theta - C_t \sin\theta) - mg$ où G est le centre d'inertie du galet.

III.A.3)

a) En remarquant que $z_G - z = a \sin\theta / 2$ on en déduit que $\ddot{z} = \ddot{z}_G$ donc $\ddot{z} + \frac{1}{2} \rho v^2 \frac{C}{m \sin\theta} z = -g$ soit

$$\omega_o^2 = \frac{1}{2} \rho v^2 \frac{C}{m \sin\theta}$$

b) On obtient $z = -g/\omega_o^2 + A \cdot \cos(\omega_o t + \varphi)$ avec $A = \sqrt{\left(\frac{g}{\omega_o^2}\right)^2 + \left(\frac{v_{z0}}{\omega_o}\right)^2}$ et $\tan\varphi = -\frac{v_{z0}\omega_o}{g}$

c) La profondeur maximale est donc atteinte pour $z_{\min} = -g/\omega_o^2 - A$.

d) On doit avoir : $z_{\min} > -a \cdot \sin\theta$ soit $g/\omega_o^2 + A < a \sin\theta$ et $A^2 < (a \sin\theta - g/\omega_o^2)^2$ avec $v_{z0} = -v_o \sin\alpha$

$$\Leftrightarrow v_o^2 \sin^2\alpha < a^2 \sin^2\theta \omega_o^2 - 2 a g \sin\theta \quad \text{avec} \quad \omega_o^2 = \frac{\rho a C v_o^2}{2 m \sin\theta}$$

$$\Leftrightarrow v_o^2 (\sin^2\alpha - \rho C a^3 \sin\theta / 2m) < -2 a g \sin\theta \quad \text{d'où le résultat !}$$

AN : $C = \cos 5^\circ - \sin 5^\circ = 0,909$

$v_{0\min} = 0,42 \text{ m.s}^{-1}$ qui me semble bien faible ! mais bon, c'est la vitesse minimale !

III.A.4. $z(\tau) = 0 = -g/\omega_o^2 + A \cdot \cos(\omega_o \tau + \varphi)$ avec $z(0) = 0 = -g/\omega_o^2 + A \cos\varphi$, d'où

$$z(\tau) = 0 = A \cdot \cos\varphi + A \cdot \cos(\omega_o \tau + \varphi)$$

On calcule $\varphi = 89,9^\circ \approx 90^\circ$, $\cos\varphi = 0$ on doit donc avoir $\sin(\omega_o \tau) = 0$, soit $\tau = \pi/\omega_o$.

On a alors $A \approx v_o \cdot \sin\alpha_o / \omega_o$ avec $\omega_o \approx 6755 \text{ s}^{-1}$ (valeur semblant trop grande !)

et $z(t) \approx -g/\omega_o^2 - A \sin(\omega_o t) \approx -v_o \sin\alpha_o \sin(\omega_o t) / \omega_o$

On en déduit donc $v_z(t) = -v_o \sin\alpha_o \cos(\omega_o t)$

composante $v_z(\tau) = -v_o \sin\alpha_o \cos(\omega_o \tau) = v_o \cdot \sin\alpha_o = -v_{z0} = 1,7 \text{ m.s}^{-1}$ avec $\cos(\omega_o \tau) = -1$.

Autre méthode :

Les forces auxquelles est soumis le galet étant conservatives avec les hypothèses faites, on a : $|v_z(\tau)| = |v_z(0)|$, et donc : $v_z(\tau) = -v_z(0)$.

III.A.5.

a) De la question **II.A.2**) : $m \dot{v}_{xG} = \frac{1}{2} C_n \rho v_o^2 \left(-\frac{za}{\sin \theta} \right) (-\sin \theta) + \frac{1}{2} C_t \rho v_o^2 \left(-\frac{za}{\sin \theta} \right) (-\cos \theta) = \frac{1}{2} \rho v_o^2 \frac{z(t)a}{\sin \theta} C'$

$\dot{v}_{xG} = \frac{\rho v_o^2}{2m} \frac{a}{\sin \theta} C' \left(-\frac{g}{\omega_o^2} - A \sin \omega_o t \right)$ en prenant $\varphi = 90^\circ$ et $A = v_o \sin \alpha_o / \omega_o$, donc en intégrant, ici on ne peut pas négliger $-g / \omega_o^2$ devant A

$v_{xG} = \frac{\rho v_o^2}{2m} \frac{a}{\sin \theta} C' \left(-\frac{g}{\omega_o^2} t + \frac{A}{\omega_o} \cos \omega_o t \right) + cst$ et $v_{xGo} = \frac{\rho v_o^2}{2m} \frac{a}{\sin \theta} C' \frac{A}{\omega_o} + cst$ soit

$cst = v_{xGo} - \frac{\rho v_o^2}{2m} \frac{a}{\sin \theta} C' \frac{A}{\omega_o}$ et $v_{xG} = \frac{\rho v_o^2}{2m} \frac{a}{\sin \theta} C' \left(-\frac{g}{\omega_o^2} t + \frac{A}{\omega_o} (\cos \omega_o t - 1) \right) + v_{xGo}$

D'où $\Delta v_x = v_{xG}(\tau) - v_{xGo} = \frac{\rho v_o^2}{2m} \frac{a}{\sin \theta} C' \left(-\frac{g}{\omega_o^2} \tau + \frac{A}{\omega_o} (\cos \omega_o \tau - 1) \right)$

comme $\sin \omega_o \tau = 0$; $\cos \omega_o \tau = -1$ et $\omega_o \tau = \pi$ soit $\Delta v_x = \frac{\rho v_o^2}{2m} \frac{a}{\sin \theta} C' \left(-\frac{g}{\omega_o^2} \frac{\pi}{\omega_o} - 2 \frac{A}{\omega_o} \right)$ et

$\frac{\Delta v_x}{v_{x0}} = \frac{\Delta v_x}{v_o \cos \alpha_o} = \frac{\rho v_o^2}{2m} \frac{a}{\sin \theta \omega_o^2} C' \left(-\frac{g}{v_o \cos \alpha_o} \frac{\pi}{\omega_o} - 2 \frac{A \omega_o}{v_o \cos \alpha_o} \right) =$
 $-\frac{\rho v_o^2}{2m} \frac{a C'}{\sin \theta} \frac{2 m \sin \theta}{\rho v_o^2 a C} \left(\frac{g}{v_o \cos \alpha_o} \frac{\pi}{\omega_o} + 2 \frac{v_o \sin \alpha_o}{v_o \cos \alpha_o} \right) = -\frac{C'}{C} \left(\frac{g}{v_o \cos \alpha_o} \frac{\pi}{\omega_o} + 2 \tan \alpha_o \right)$

AN $C' = \sin 5^\circ + \cos 5^\circ = 1,08$ d'où $\left| \frac{\Delta v_x}{v_{x0}} \right| = 0,083$

b) On trouve que la variation de la composante de la vitesse selon Ox est très faible. Pour qu'on puisse considérer v_o constante, il faut que v_o soit suffisamment grande et que l'angle d'attaque α_o soit suffisamment faible.

III.B.1. a) Le théorème de l'énergie cinétique donne $\Delta E_c = W = \int_0^\tau (\vec{F} \cdot \vec{v} + m \vec{g} \cdot \vec{v}) dt$

$\vec{F} \cdot \vec{v} + m \vec{g} \cdot \vec{v} = F_x v_x + F_z v_z - mg v_z$

Or $m \frac{dv_z}{dt} = F_z - mg$ et $\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v_z^2 \right) = F_z v_z - mg v_z$ d'où

$W = \int_0^\tau F_x v_x dt + \int_0^\tau (F_z v_z - mg v_z) dt = \int_0^\tau F_x v_x dt + \int_{v_{z0}}^{v(\tau)} d \left(\frac{1}{2} m v_z^2 \right) = \int_0^\tau F_x v_x dt$ car $v(\tau) = -v_{z0}$, d'où le résultat.

b) $\Delta E_c = W = v_{x0} \int_0^\tau F_x dt = v_{x0} \int_0^\tau -\frac{1}{2} \rho v^2 C' S_{im} dt = v_{x0} \int_0^\tau -\frac{C'}{C} F_z dt$ donc $\boxed{\mu = C'/C}$

c) On calcule $d^2z/dt^2 \approx A \cdot \omega_o^2 = 1,2 \cdot 10^4 \text{ m.s}^{-2}$!!! et $g = 10 \text{ m.s}^{-2}$, or il semble que dans cette question, il faudrait pouvoir négliger d^2z/dt^2 devant F_z , on aurait $F_z = mg$, d'où :

$\Delta E_c = v_{x0} \int_0^\tau -\frac{C'}{C} mg dt = -\mu \cdot v_{x0} \cdot mg \cdot \tau = -\mu \cdot v_{x0} \cdot mg \cdot \pi / \omega_o$

ω_o étant proportionnelle à v_o , ΔE_c est indépendant de v_o .

III.B.2. $N = E_c(0) / (-\Delta E_c) = C v_o \omega_o / (2 C' \cos \alpha_o \cdot g \cdot \pi) = 4530$!!!! Ca ne va pas !!

En passant, on calcule $\omega_o = 6755 \text{ s}^{-1}$, qui semble trop grand, et donc $\tau = 0,5 \text{ ms}$ trop faible !

III. Physique du skeleton

III.A. Théorème de l'énergie cinétique : $-\frac{1}{2}mv_0^2 = -mg\sin\alpha$ d'où $a = v_0^2 / 2g\sin\alpha$
 $a = 30^2 / 2 \cdot 10 \cdot 0,05 = 900 \text{ m}$

III.B.

III.B.1)

a) **La résistance R du cadre nécessaire à la résolution de la question n'est introduite que dans la constante cherchée τ et n'est pas mentionnée dans la description du cadre précédent cette question !**

Lorsque le cadre pénètre dans la région où règne le champ magnétique B, la variation du flux magnétique crée un courant induit dans le cadre.

vue de dessus

cadre

0 x

α

β

$\vec{v}$

$\vec{B}$

L

l

$d\vec{\ell}$

Déterminons la fém induite : $e_{\text{ind}} = \int_{\text{cadre}} (\vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{\ell} = \int_{\text{cadre}} v B_0 \vec{u}_z \cdot d\vec{\ell} =$
 $\int_{\alpha\beta} v B_0 \vec{u}_z \cdot d\vec{\ell} = v B_0 \ell$

Du point de vue électrocinétique le est équivalent au circuit ci-contre

$= Ri = v B_0 \ell$

e_{ind} cadre doit e_{ind}

On applique la rfd projetée directement sur Ox au cadre : $m \frac{dv}{dt} = F_{\text{lap}x}$ où $F_{\text{lap}x}$ est la force de Laplace qui s'exerce sur le cadre. $\vec{F}_{\text{lap}} = \int_{\text{cadre}} i d\vec{\ell} \wedge \vec{B}$.

La force de Laplace n'est pas compensée sur le côté $\alpha\beta$, $\vec{F}_{\text{lap}} = \int_{\alpha\beta} -i d\ell B_0 \vec{u}_x = -i \ell B_0 \vec{u}_x$

soit $\frac{dv}{dt} = -\frac{i \ell B_0}{m} = -\frac{v (\ell B_0)^2}{mR}$ d'où l'équation différentielle

$$\frac{dv}{dt} + \frac{v}{\tau} = 0 \text{ avec } \tau = \frac{mR}{(\ell B_0)^2}. \text{ Cette expression reste valable tant que } x < L$$

Lorsque le cadre est entièrement dans la région où règne B, le flux ne varie plus donc plus de courant induit, donc plus de force de Laplace, le mouvement du cadre redevient alors rectiligne uniforme.

si $x > L$ $\frac{dv}{dt} = 0$

b) si $x < L$ $v(t) = v_0 e^{-t/\tau}$ et $x(t) = \tau v_0 (1 - e^{-t/\tau})$

Le cadre sort de la zone de décélération lorsque $x(t_f) = L = \tau v_0 (1 - e^{-t_f/\tau})$ d'où $e^{-t_f/\tau} = 1 - L / v_0 \tau$. On en déduit alors la vitesse en fin de décélération : $v_f = v_0 - L / \tau$.

l'engin s'arrête si $v_f \leq 0$ soit $L \geq v_0 \tau$

AN : $\tau = (100 \cdot 0,01) / (0,3 \cdot 1)^2 = 11 \text{ s}$; $L = 333 \text{ m} \gg L_{\text{skeleton}}$!

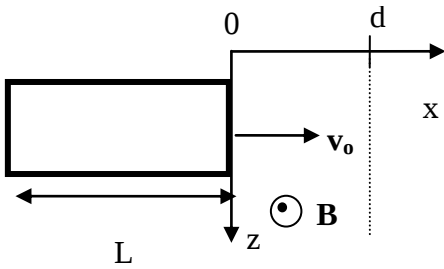
$v_f = 30 - 0,5 / 11 = 29,9 \text{ m.s}^{-1}$.

La vitesse a très peu diminué au cours de cette phase de freinage. Il faudra donc envisager un autre système de freinage ...

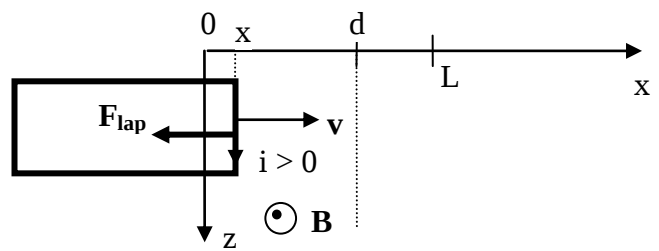
III.B.2)

a) $L \leq d$ Le freinage s'effectue tant que le flux de B varie dans le cadre :

pas de freinage $x < 0$

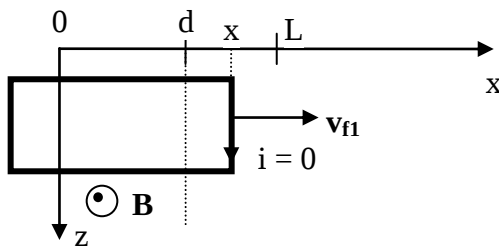


1^{ère} phase de freinage $0 < x < d$

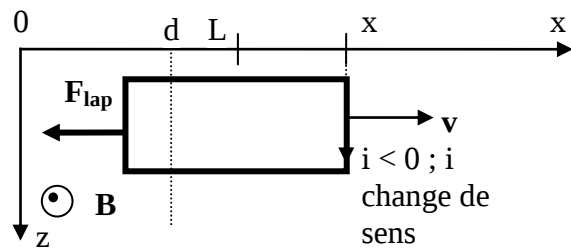


A l'issue de la 1^{ère} phase de freinage $v_{f1} = v_0 - d/\tau$.

pas de freinage $d < x < L$
la vitesse du cadre reste constante



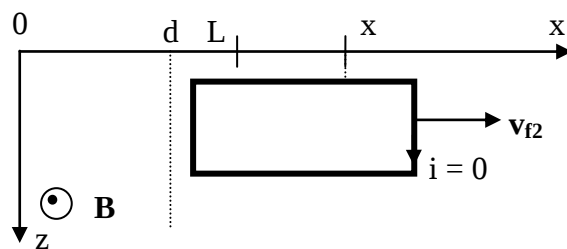
2^{ème} phase de freinage $0 < x-L < d$ soit $L < x < d+L$



A l'issue de la 2^{ème} phase de freinage $v_{f2} = v_{f1} - d/\tau$

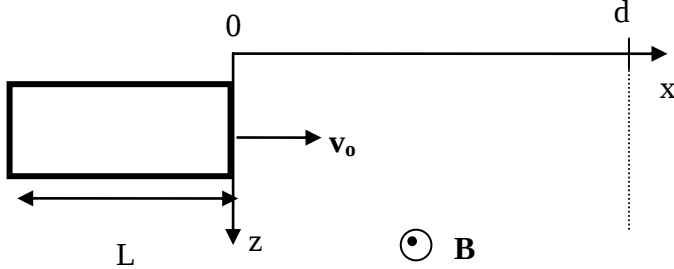
$$= v_0 - 2d/\tau.$$

plus de freinage $x > d+L$

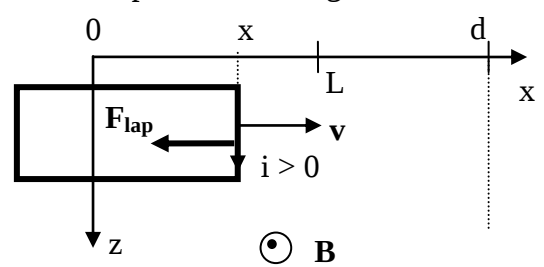


b) $L \geq d$

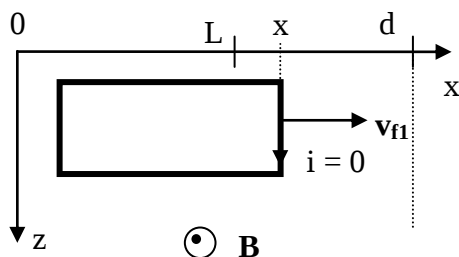
pas de freinage $x < 0$



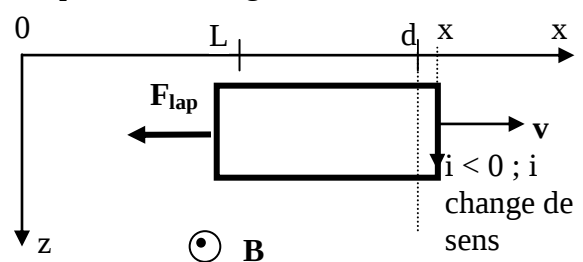
1^{ère} phase de freinage $0 < x < L$



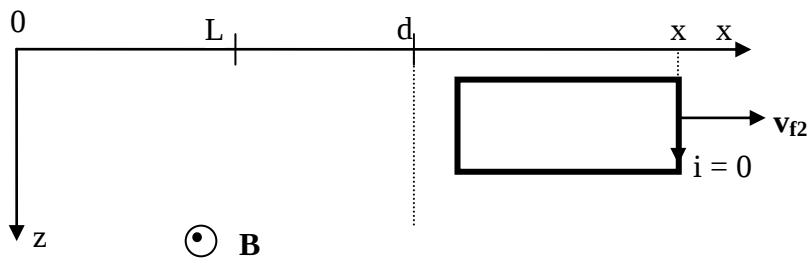
pas de freinage $L < x < d$
la vitesse du cadre reste constante



2^{ème} phase de freinage $d < x < d+L$



plus de freinage $x > d+L$



A l'issue de la 1^{ère} phase de freinage $v_{f1} = v_0 - L/\tau$.

A l'issue de la 2^{ème} phase de freinage $v_{f2} = v_{f1} - L/\tau = v_0 - 2L/\tau$.

c) On veut que v_{f2} soit le plus petit possible et qu'il n'existe pas de zone où v soit constante. Il faut donc prendre $L = d$.

III.B.3) On appelle zone de freinage une région telle que pour $0 < x < L$ le champ magnétique vaut $B_0 \vec{e}_y$, puis pour $L < x < 2L$ le champ magnétique est nul. La distance D entre 2 zones de freinage successives doit donc être nulle, afin que le freinage se déroule de manière continue. Pour stopper le skeleton il faut $v_f = 0$ après N zones de freinage, soit $v_{fN} = v_0 - 2NL / \tau$ d'où $N = v_0 \tau / 2L = 333,3 / 1 = 334$

La distance d'arrêt est donc de $2LN = 334$ m, soit environ 3 fois plus faible que celle de la question préliminaire et bien plus faible également que celle qu'on n'a pas déterminée dans la question **III.B.1** puisque l'engin ne s'arrête jamais...

III.B.4)

a) D'après le résultat de la question **III.B.1)b)** la durée de la 1^{ère} phase de freinage est

$$t_{f1} = -\tau \ln(1 - L / \tau v_0)$$

$$AN : t_{f1} = -11,1 \cdot \ln(1 - 0,5/333) = 16,7 \text{ ms}$$

si t_{f2} est l'instant de fin de la 2^{ème} phase de freinage :

$$(t_{f2} - t_{f1}) = -\tau \ln(1 - L / \tau v_{f1}) = -\tau \ln(1 - L / (\tau v_0 - L)) = -\tau \ln\left(\frac{\tau v_0 - 2L}{\tau v_0 - L}\right)$$

et donc $t_{f2} = -\tau \ln\left(\frac{\tau v_0 - 2L}{\tau v_0}\right)$ est la durée de freinage après passage dans la première zone de freinage optimisée.

$$AN : t_{f2} - t_{f1} = -11,1 \cdot \ln\left(\frac{333-1}{333-0,5}\right) = 16,7 \text{ ms}$$

La durée totale du freinage est $t_{f2N} = -\tau \ln\left(\frac{\tau v_0 - 2LN}{\tau v_0}\right)$ qui tend vers $+\infty$ puisque $\tau v_0 = 2LN$.

Ce freinage n'est donc pas utilisable pour toute la durée.

b) On veut $v_f = 10 \text{ m.s}^{-1} = v_1 = v_0 - 2NL / \tau$ soit $N = (v_0 - v_1)\tau / 2L = 222,2$.

Il faut donc 223 zones de freinage.

$$\text{La durée sera de } t_{f2N} = -11,1 \cdot \ln\left(\frac{333-223}{333}\right) = 12,3 \text{ s.}$$

III.C

III.C.1) Dans cette question il n'y a aucune précision sur la géométrie de l'étude... ni d'indication de relation entre opérateurs vectoriels !

On ne donne pas la conductivité électrique du matériau, donc je ne pense pas que dans cette question il faille déjà tenir compte du passage du courant... et que la dernière phrase de la question concerne la question suivante...

Prenons le cas général en 3 dimensions :

Appliquons le 1^{er} principe au système élémentaire de masse δm , de volume $d\tau$ solide fixe pendant une durée dt : $dU = \delta Q$

$$\text{avec } dU = \mu c d\tau \cdot \left(\frac{\partial T}{\partial t} \right) dt$$

$$\text{et } \delta Q = \delta Q_{\text{entrant par conduction}} - \delta Q_{\text{sortant par conduction}} = - \text{div} \vec{j}_Q \cdot d\tau \cdot dt$$

d'après la loi de Fourier $\vec{j}_Q = -\lambda \overrightarrow{\text{grad} T}$ et $\text{div} \vec{j}_Q = -\lambda \text{div}(\overrightarrow{\text{grad} T}) = -\lambda \Delta T$ on en déduit

$$\Delta T = \frac{\mu c}{\lambda} \frac{\partial T}{\partial t}$$

III.C.2) La durée caractéristique τ des transferts thermiques est donnée par le coefficient de diffusivité

thermique $K = \frac{\lambda}{\mu c}$ homogène à a^2 / τ soit $\tau = \mu c a^2 / \lambda = 8,9 \cdot 10^3 \cdot 10^{-4} / \pi \approx 0,3$ s soit faible devant la durée du freinage électromagnétique.

III.C.3) On applique cette fois le 1^{er} principe au cadre en mouvement rectiligne horizontal :

$\Delta E_c + \Delta U = 0$ puisqu'on néglige les échanges thermiques avec le milieu extérieur.

$$- \frac{1}{2} m v_o^2 + m' c \Delta T = 0 \text{ d'où } \Delta T = \frac{m v_o^2}{2 m' c} \text{ avec } m' = 2\mu(L + \ell) = 1,4 \text{ kg}$$

$$\Delta T = \frac{100 \cdot 30^2}{1,4 \cdot 390} = 81^\circ \text{C}$$

III.C.4)

a) On applique à nouveau le 1^{er} principe au cadre supposé fixe : $dU = - P_{th} dt$

$$m' c \cdot dT_C = - 2(L + \ell) \cdot 2\pi a \cdot h (T_C(t) - T_o)$$

soit l'équation différentielle : $\frac{dT_C}{dt} + \frac{2\pi a h}{\mu s c} (T_C(t) - T_o) = 0$ d'où le temps caractéristique

$$b) \tau = \frac{\mu s c}{2\pi a h} = \frac{8,9 \cdot 10^3 \cdot 10^{-4} \cdot 390}{2\pi \cdot 0,56 \cdot 10^{-2} \cdot 10} = 986 \text{ s} \approx 16 \text{ min.}$$

III.C.5)

a) Le seul échange thermique à l'intérieur de l'isolant est de type conductif en régime stationnaire, on a donc conservation de la puissance thermique dissipée à l'intérieur de l'isolant.

On peut donc écrire dans l'isolant, sur une unité de longueur : $P_{th}(r) = P_{th}(b) = P_{th}(a)$

$$j_{is}(r) \cdot 2\pi r = h(T_{is}(b) - T_o) \cdot 2\pi b \text{ puis en appliquant la loi de Fourier } -\lambda_{is} \frac{dT}{dr} \cdot r = h(T_{is}(b) - T_o) \cdot b \text{ soit}$$

$$dT_{is} = - \frac{h(T_{is}(b) - T_o) \cdot b}{\lambda_{is}} \frac{dr}{r}$$

Donc $P = P_{th}(a) = P_{th}(b)$ puissance dissipée par unité de longueur de câble.

En intégrant l'équation différentielle précédente pour $a < r < b$ on détermine

$$T_{is}(b) - T_C = - \frac{h(T_{is}(b) - T_o) \cdot b}{\lambda_{is}} \ln \left(\frac{b}{a} \right) = - \frac{h(T_{is}(b) - T_o) \cdot a x}{\lambda_{is}} \ln x \text{ d'où}$$

$$T_{is}(b) = \frac{T_C + \frac{h a x}{\lambda_{is}} \ln x T_o}{1 + \frac{h a x}{\lambda_{is}} \ln x} \text{ et } T_{is}(b) - T_o = \frac{T_C + \frac{h a x}{\lambda_{is}} \ln x T_o - T_o - \frac{h a x}{\lambda_{is}} \ln x T_o}{1 + \frac{h a x}{\lambda_{is}} \ln x} = \frac{T_C - T_o}{1 + \frac{h a x}{\lambda_{is}} \ln x}$$

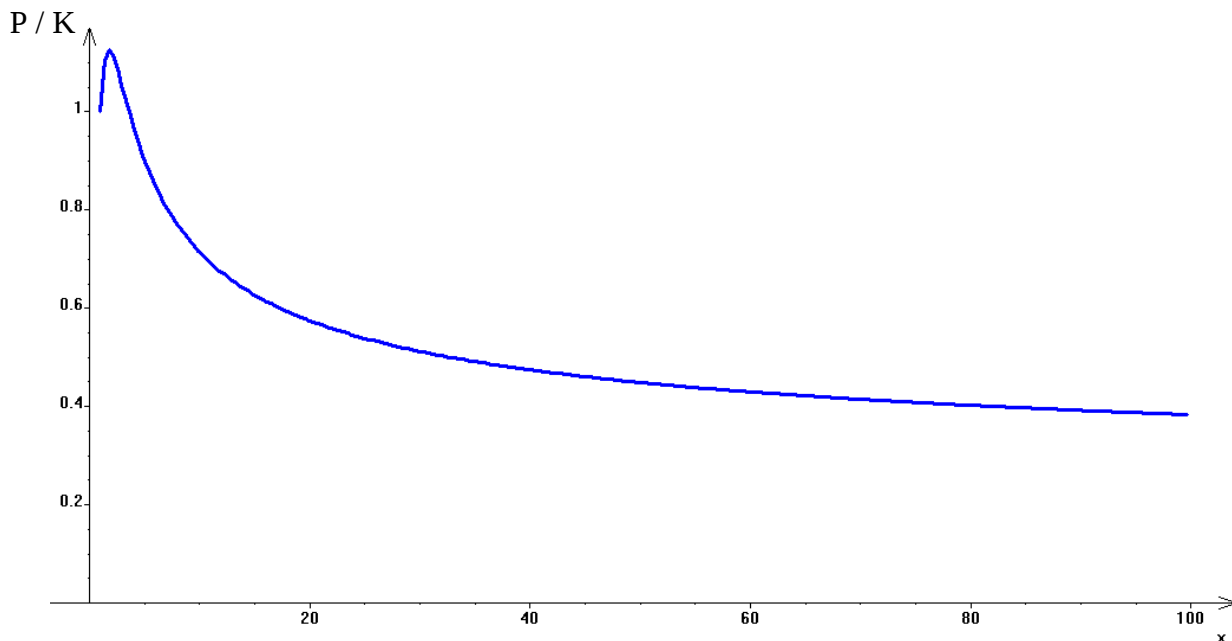
$$\text{d'où } P = h \cdot 2\pi a x \frac{T_C - T_o}{1 + \frac{h a x}{\lambda_{is}} \ln x} = h \cdot 2\pi a (T_C - T_o) \frac{x}{1 + \frac{h a}{\lambda_{is}} x \ln x} = K \frac{x}{1 + \frac{h a}{\lambda_{is}} x \ln x}$$

d'où $K = h \cdot 2\pi a (T_c - T_o)$.

K est homogène à une puissance thermique linéique, c'est la puissance thermique perdue par une unité de longueur du cadre lorsque $x = 1$, c'est-à-dire lorsqu'il n'y a pas de manchon isolant.

$$b) \quad \frac{dP}{dx} = K \frac{1 - \frac{ha}{\lambda_{is}} x}{\left(1 + \frac{ha}{\lambda_{is}} x \ln x\right)^2} > 0 \text{ si } x < \frac{\lambda_{is}}{ha} \text{ et } \frac{dP}{dx} < 0 \text{ dans le cas contraire, d'où l'allure de la}$$

courbe avec $\frac{\lambda_{is}}{ha} = 0,1 / 10 \cdot 0,56 \cdot 10^{-2} = 1,77$ et $x > 1$.



Lorsque la courbe est croissante, x est proche de 1, la puissance thermique évacuée par le manchon est supérieure à la puissance thermique produite par le cadre, le manchon n'est pas trop isolant...

Lorsque la courbe est décroissante le manchon absorbe la puissance évacuée par le cadre

Pour que le refroidissement s'effectue le plus « rapidement » possible il faut évacuer le maximum de puissance avec un minimum d'isolant soit prendre $x = \frac{\lambda_{is}}{ha} \approx 1,8$

c) Si on prend $x = \frac{\lambda_{is}}{ha}$

$$P = h \cdot 2\pi a (T_c(t) - T_o) \frac{x}{1 + \frac{ha}{\lambda_{is}} x \ln x} = h \cdot 2\pi a (T_c(t) - T_o) \frac{\frac{\lambda_{is}}{ha}}{1 + \ln\left(\frac{\lambda_{is}}{ha}\right)} = h \cdot 2\pi a (T_c(t) - T_o) \cdot 1,13$$

Donc en reprenant le bilan réalisé à la question **III.C.4** on montre que le nouveau temps caractéristique de refroidissement est $\tau' = \tau / 1,13 \approx 14$ min.