

Correction TD24 : Équations différentielles

Exercice 4 (Mines-Télécom PSI 2024)

1. Donner les solutions polynomiales de $(x^2 - 1)y''(x) + 2xy' - 2y = 0$.
2. On pose $y(x) = xz(x)$; trouver une équation différentielle vérifiée par z
3. Déterminer a, b, c tels que $\frac{2 - 4x^2}{x(x^2 - 1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x - 1} + \frac{c}{x + 1}$; en déduire z puis résoudre l'équation initiale sur $] -1, 1[$.

1. Si P est une solution polynomiale de degré $n \geq 0$ alors on écrit $P = a_n X^n + \dots$ avec $a_n \neq 0$. On a $\deg[(X^2 - 1)P'' + 2XP' - 2P] \leq n$; on calcule alors le coefficient de X^n (terme de plus haut degré) dans $(X^2 - 1)P'' + 2XP' - 2P$, qui doit être nul pour que P soit solution de l'équation homogène. Ce coefficient est $n(n - 1)a_n + 2na_n - 2a_n = (n^2 + n - 2)a_n = (n - 1)(n + 2)a_n$. Comme $a_n \neq 0$ et $n \geq 0$, on doit avoir $n = 1$. Ainsi, si P est un polynôme non nul solution alors $\deg(P) = 1$.

On teste alors avec $P = aX + b$ et on a $(X^2 - 1)P'' + 2XP' - 2P = 2aX - 2(aX + b) = -2b$. Donc les solutions polynomiales de l'équation sont $P = aX^2$ avec $a \in \mathbb{R}$.

2. Le changement de fonction proposé est donc un cas particulier de la prop II.8.1 avec $y_0(x) = x$ qui ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $\mathbb{R}^{-*}$.

Sur I , un des deux intervalles $\mathbb{R}^{+*}$ ou $\mathbb{R}^{-*}$, si $y(x) = xz(x)$ alors si $z \in \mathcal{D}^2(I)$, par produit, $y \in \mathcal{D}^2(I)$. Inversement, $z(x) = \frac{y(x)}{x}$ donc, par quotient, si $y \in \mathcal{D}^2(I)$ alors $z \in \mathcal{D}^2(I)$. On a ensuite $y'(x) = xz'(x) + z(x)$ et $y''(x) = 2z'(x) + xz''(x)$ donc $(x^2 - 1)y''(x) + 2xy'(x) - 2y(x) = x(x^2 - 1)z''(x) - (2 - 4x^2)z'(x)$. On peut donc conclure que y est solution de l'équation initiale si et seulement si z est solution de l'équation $x(x^2 - 1)z'' - (2 - 4x^2)z' = 0$ (équation différentielle d'ordre 1 vérifiée par la fonction z')

3. La DES est $\frac{2 - 4x^2}{x(x^2 - 1)} = \frac{-2}{x} + \frac{-1}{x - 1} + \frac{-1}{x + 1}$ donc, sur $] -1, 0[$ ou $]0, 1[$, $z'(x) = \alpha \exp[-2 \ln |x| - \ln |x - 1| - \ln |x + 1|]$

de la forme $z'(x) = \frac{\alpha}{x^2(x - 1)(x + 1)}$. On refait alors une DES : $z'(x) = \alpha \left[\frac{-1}{x^2} + \frac{1}{2(x - 1)} - \frac{1}{2(x + 1)} \right]$. Ainsi,

$z(x) = \alpha \left[\frac{1}{x} + \frac{1}{2} \ln |x - 1| - \frac{1}{2} \ln |x + 1| \right] + \beta = \alpha \left[\frac{1}{x} + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 - x}{1 + x} \right) \right] + \beta$. Les solutions sur $] -1, 0[$ ou $]0, 1[$ sont donc définies par $y(x) = \alpha \left[1 + \frac{x}{2} \ln \left(\frac{1 - x}{1 + x} \right) \right] + \beta x$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Pour trouver les solutions sur $] -1, 1[$, reste à faire le recollement en 0 : si

$$y(x) = \begin{cases} \alpha \left[1 + \frac{x}{2} \ln \left(\frac{1 - x}{1 + x} \right) \right] + \beta x & \text{si } x \in] -1, 0[\\ \gamma \left[1 + \frac{x}{2} \ln \left(\frac{1 - x}{1 + x} \right) \right] + \delta x & \text{si } x \in]0, 1[\end{cases}$$

On a $\lim_{0^-} y = \alpha$ et $\lim_{0^+} y = \gamma$ donc y se prolonge par continuité en 0 si et seulement si $\alpha = \gamma$. On pose alors $y(0) = \alpha$

et on a $\frac{y(x) - y(0)}{x} = \begin{cases} \alpha \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 - x}{1 + x} \right) + \beta & \text{si } x \in] -1, 0[\\ \alpha \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 - x}{1 + x} \right) + \delta & \text{si } x \in]0, 1[\end{cases}$ donc $\lim_{0^-} \frac{y(x) - y(0)}{x} = \beta$ et $\lim_{0^+} \frac{y(x) - y(0)}{x} = \delta$; la

fonction est donc dérivable en 0 si et seulement si $\beta = \delta$.

En résumé, les solutions de l'équation sur $] -1, 1[$ sont définies par

$$y(x) = \begin{cases} \alpha \left[1 + \frac{x}{2} \ln \left(\frac{1 - x}{1 + x} \right) \right] + \beta x & \text{si } x \neq 0 \\ \alpha & \text{si } x = 0 \end{cases}, (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$$

Exercice 6 (CCINP PSI 2024)

Soit $(E) : t^2 y''(t) + 3t y'(t) + y(t) = t + \frac{1}{t}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$

1. Énoncer le théorème de Cauchy-Lipschitz
2. On pose $g(x) = f(e^x)$. Montrer que f est solution de (E) si et seulement si g est solution d'une équation différentielle à déterminer.
3. Résoudre (E) sur $\mathbb{R}^{+*}$

1. Cours

2. Le changement de variable $t = e^x$ donne une bijection de $x \in \mathbb{R}$ sur $t \in \mathbb{R}^{+*}$. Comme $g(x) = f(e^x)$, par composition, si $f \in \mathcal{D}^2(\mathbb{R}^{+*})$ alors $g \in \mathcal{D}^2(\mathbb{R})$ alors que $f(t) = g(\ln t)$ donc, par composition à nouveau, si $g \in \mathcal{D}^2(\mathbb{R})$ alors $f \in \mathcal{D}^2(\mathbb{R}^{+*})$.

Si $g(x) = f(e^x)$ alors $g'(x) = e^x f'(e^x)$ puis $g''(x) = e^x f'(e^x) + e^{2x} f''(e^x)$. Par bijectivité, f est solution sur $\mathbb{R}^{+*}$ de (E) si et seulement si $\forall x \in \mathbb{R}, e^{2x} f''(e^x) + 3e^x f'(e^x) + f(e^x) = e^x + e^{-x}$. Comme $e^{2x} f''(e^x) + 3e^x f'(e^x) + f(e^x) = g''(x) + 2g'(x) + g(x)$, f est solution de (E) sur $\mathbb{R}^{+*}$ si et seulement si g est solution sur $\mathbb{R}$ de $(E_g) : g''(x) + 2g'(x) + g(x) = e^x + e^{-x}$.

L'équation caractéristique de l'équation (E_g) est $X^2 + 2X + 1 = 0 \Leftrightarrow (X + 1)^2$ donc les solutions de l'équation homogène sont $g_H(x) = (\alpha x + \beta)e^x$.

Comme 1 n'est pas solution de $X^2 + 2X + 1 = 0$, on cherche une solution de $g'' + 2g' + g = e^x$ sous la forme $g_p(x) = ae^x$ et on trouve $g_p(x) = \frac{1}{4}e^x$.

Par contre -1 est racine double de $X^2 + 2X + 1 = 0$ donc on cherche une solution de $g'' + 2g' + g = e^{-x}$ sous la forme $g_p(x) = bx^2e^{-x}$ et on trouve $g_p(x) = \frac{1}{2}x^2e^{-x}$.

Les solutions de (E_g) sont donc $g(x) = (\alpha x + \beta)e^{-x} + \frac{1}{4}e^x + \frac{1}{2}x^2e^{-x}$ donc celles de (E) sur $\mathbb{R}^{+*}$

$$f(t) = (\alpha \ln(t) + \beta) \frac{1}{t} + \frac{t}{4} + \frac{(\ln t)^2}{2t}, (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2.$$

Exercice 7 (Centrale PSI 2019)

Soit $(E) : y'' + \varphi(t)y = 0$ où φ est continue sur $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles.

1. Résoudre (E) dans le cas où φ est constante.

2. Soient f et g continues sur $[a, +\infty[$, g positive, telle que $\forall t \in [a, +\infty[, f(t) \leq M + \int_a^t f(u)g(u) du$.

On pose $F(t) = M + \int_a^t f(u)g(u) du$ et $G(t) = \exp\left(\int_a^t g(u) du\right)$.

En calculant la dérivée de $\frac{F}{G}$, montrer que $\forall t \in [a, +\infty[, f(t) \leq M \exp\left(\int_a^t g(u) du\right)$.

3. On suppose que $t \mapsto t\varphi(t)$ est intégrable sur $[a, +\infty[$. Soit y une solution de (E) .

a) Justifier qu'il existe une fonction affine A telle que $y(t) = A(t) - \int_a^t (t-u)y(u)\varphi(u) du$. (*)

b) En déduire que $t \mapsto \frac{y(t)}{t}$ est bornée sur $[a, +\infty[$ avec $a > 0$

1. Si $\varphi = -\alpha^2 < 0$ alors $y(t) = ae^{\alpha t} + be^{-\alpha t}$; si $\varphi = 0$ alors $y(t) = at + b$ et si $\varphi = \omega^2 > 0$ alors $y(t) = a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t)$.

2. f et g sont continues donc F et G sont $\mathcal{C}^1$ et $\left(\frac{F}{G}\right)'(t) = \frac{g(t)(f(t) - F(t))}{G(t)} \leq 0$. La fonction $\frac{F}{G}$ est décroissante sur $[a, +\infty[$ donc $\frac{F(t)}{G(t)} \leq \frac{F(a)}{G(a)} = M$. On en déduit $F(t) \leq MG(t)$ puis $f(t) \leq F(t)$ par hypothèse donc $f(t) \leq MG(t)$ (qui est le résultat demandé).

3. a) Il faut changer la forme définissant z pour justifier sa dérivabilité et calculer sa dérivée

On a $z(t) = y(t) - t \int_a^t y(u)\varphi(u) du + \int_a^t uy(u)\varphi(u) du$. Les fonctions $u \mapsto y(u)\varphi(u)$ et $u \mapsto uy(u)\varphi(u)$ sont continues sur $[a, +\infty[$ donc $t \mapsto \int_a^t y(u)\varphi(u) du$ et $t \mapsto \int_a^t uy(u)\varphi(u) du$ sont $\mathcal{C}^1$ sur $[a, +\infty[$. Par produit et combinaison linéaire, z est $\mathcal{C}^1$ sur $[a, +\infty[$ et $z'(t) = y'(t) + \int_a^t y(u)\varphi(u) du + ty(t)\varphi(t) - ty(t)\varphi(t) = y'(t) + \int_a^t y(u)\varphi(u) du$. La fonction z' est donc à nouveau dérivable et $z''(t) = y''(t) + y(t)\varphi(t)$. Comme y est solution de (E) , on a donc $z'' = 0$ donc $z(t) = \alpha t + \beta$ est affine.

b) On a $\left| \frac{y(t)}{t} \right| \leq \frac{|\alpha t + \beta|}{t} + \int_a^t \left(1 - \frac{u}{t} \right) |y(u)\varphi(u)| \, du$. Puis $\frac{|\alpha t + \beta|}{t} \leq |\alpha| + \frac{|\beta|}{a} = M$ sur $[a, +\infty[$ (car $a > 0$) et $\int_a^t \left(1 - \frac{u}{t} \right) |y(u)\varphi(u)| \, du \leq \int_a^t |y(u)\varphi(u)| \, du = \int_a^t \left| \frac{y(u)}{u} \right| \times u|\varphi(u)| \, du$. On peut donc appliquer **2** avec $f(t) = \frac{|y(t)|}{t}$ et $g(t) = t|\varphi(t)|$ qui sont bien continues et positives sur $[a, +\infty[$, ce qui donne $\left| \frac{y(t)}{t} \right| \leq M \exp \left(\int_a^t |u\varphi(u)| \, du \right) \leq M \exp \left(\int_a^{+\infty} u|\varphi(u)| \, du \right)$ car $u \mapsto u|\varphi(u)|$ est positive et intégrable sur $[a, +\infty[$.
