

Mines-Ponts

Exercice 1 (Mines-Ponts PSI 2025) [Indication] [Solution]

1. Soient $u_n = \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{k+1}\right)^n$ et $v_n = \int_2^n \left(1 - \frac{1}{x}\right)^n dx$.

- a) Montrer que $v_n \sim n \int_0^1 e^{-1/t} dt$
- b) En déduire un équivalent de u_n

2. Soit $G \subset \mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$ tel que G est stable par produit, si $A \in G$ alors $A^{-1} \in G$ et $\exists p \in \mathbb{N}^*, \forall A \in G, A^p = I_n$. On note $F = \text{Vect}(G)$ et on considère une base (M_1, \dots, M_r) de F . On définit $\varphi : G \rightarrow \mathbb{C}^r$ par $\varphi(A) = (\text{Tr}(AM_i))_{1 \leq i \leq r}$.

- a) Montrer que φ est injective.
- b) Montrer que $\varphi(G)$ est un ensemble fini.
- c) Montrer que G est un ensemble fini.

Exercice 2 (Mines-Ponts PSI 2025) [Indication] [Solution]

1. Soit $N \in \mathbb{N}$; pour $u = (x_0, \dots, x_N)$ et $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$, on pose $y_i = \sum_{p=0}^i (-1)^p x_p$.

- a) Montrer que φ définie sur \mathbb{C}^{N+1} par $\varphi(u) = (y_0, \dots, y_N)$ est un endomorphisme.
- b) Déterminer le spectre de φ .

On considère cette fois $F = \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, l'ensemble des suites complexes. Pour $u \in F$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = \sum_{p=0}^n (-1)^p u_p$

puis $\phi(u) = (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

- c) Déterminer le spectre de ϕ .
- d) Calculer ϕ^2 .

2. Déterminer, pour $P \in \mathbb{R}[X]$, la nature de $\int_0^{+\infty} (-1)^{\lfloor P(x) \rfloor} dx$.

Exercice 3 (Mines-Ponts PSI 2025) [Indication] [Solution]

1. On note $\varphi_0 : x \in \mathbb{R} \mapsto e^{-x^2}$ et on rappelle que $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_0(t) dt = \sqrt{\pi}$.

- a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \exists H_n \in \mathbb{R}[X], \forall x \in \mathbb{R}, \varphi_0^{(n)}(x) = (-1)^n H_n(x) \varphi_0(x)$.
- b) Donner le degré et le coefficient dominant de H_n .
- c) Pour $P, Q \in \mathbb{R}[X]$, on pose $(P|Q) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t^2} dt$. Montrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
- d) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $P \in \mathbb{R}[X]$; montrer que $(P|H_n) = (P'|H_{n-1})$.
- e) Montrer que (H_n) est une famille de polynômes orthogonaux et calculer $\|H_n\|$.
- f) Donner, pour $x, t \in \mathbb{R}$, la nature et la valeur de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} H_n(x)$.

2. Une urne contient des boules numérotées de 1 à n que l'on tire sans remise tant que leurs numéros sont croissants. On note X la longueur de la suite croissante des numéros obtenus. Déterminer la loi de X et la limite, quand n tend vers $+\infty$, de l'espérance de X .

Centrale

Exercice 4 (Centrale PSI 2025) [Indication] [Solution]

Soient $I = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et $E = \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$, muni du produit scalaire $(f|g) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)g(t) dt$. Pour $f \in E$, on définit les applications

A et B sur E par $A(f) : x \mapsto \int_0^x f(t) dt$ et $B(f) : x \mapsto \int_x^{\frac{\pi}{2}} f(t) dt$.

- 1. Montrer que $\forall (f, g) \in E^2, (A(f)|g) = (f|B(g))$.
- 2. Montrer que les valeurs propres de $B \circ A$ sont positives ou nulles.

3. Montrer que $\forall f \in E, \forall x \in I, (A(f)(x))^2 \leq x \int_0^x f(t)^2 dt$.
4. En déduire qu'il existe un réel $K > 0$ tel que $\forall f \in E, \|A(f)\| \leq K\|f\|$.
5. Déterminer les valeurs propres de A .

Exercice 5 (Centrale PSI 2025) [Indication] [Solution]

1. Soit $f : \Omega \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.
 - a) Rappeler la définition de « f est bornée sur Ω ».
 - b) Rappeler la définition de « f admet un maximum sur Ω ».
2. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on pose $s(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$ et $\varphi(z) = |s(z)|^2$.
 - a) φ est-elle bornée sur \mathbb{C} ?
 On pose $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$.
 - b) Montrer que φ est bornée sur D .
 - c) Montrer que φ atteint son maximum sur D en exactement deux points.

Exercice 6 (Centrale PSI 2025) [Indication] [Solution]

Soit $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ admettant un DL $_k(+\infty)$, $k \geq 2$, de la forme $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \dots + \frac{a_k}{x^k} + o\left(\frac{1}{x^k}\right)$.

1. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que la série $\sum_{n \geq 1} f(n)$ converge.
2. On pose $p_n = \prod_{k=2}^n f(k)$. À quelles conditions la suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est-elle convergente ?
3. ?

Exercice 7 (Centrale PSI 2025) [Indication] [Solution]

Soient $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ lipschitzienne et $f_n : x \mapsto \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(x + \frac{k}{n}\right)$

1. Rappeler la définition de f est K -lipschitzienne.
2. Montrer que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge simplement sur \mathbb{R} .
3. Montrer que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur \mathbb{R} .
4. Si $f(x) = x^2$, étudier les modes de convergence de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sur \mathbb{R} .

Exercice 8 (Centrale PSI 2025) [Indication] [Solution]

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on dit que A est nilpotente d'indice p si $A^p = 0$ et $A^{p-1} \neq 0$. On note $J_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ I_{n-1} & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Soit A nilpotente d'indice n . Montrer que A est semblable à J_n .
2. Soit A nilpotente d'indice p . Montrer que $p \leq n$.
3. ?

Exercice 9 (Centrale PSI 2025) [Indication] [Solution]

Soit $A = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & -8 & 4 \\ 4 & 4 & 7 \\ -8 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 canoniquement associé à A .

1. Reconnaître f .
2. Déterminer une matrice P orthogonale telle que $A = PR(\theta)P^{-1}$ pour un certain $\theta \in \mathbb{R}$.
3. ?

Exercice 10 (Centrale PSI 2025) [Indication] [Solution]

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}^{+*}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \ln(1 + u_n)$.

1. Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite. Que dire de la série $\sum (-1)^n u_n$?
2. Montrer que $\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) \sim -\frac{u_n}{2}$. Quelle est la nature de $\sum u_n$?
3. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de fonctions définie par $f_0 : I \rightarrow \mathbb{R}^{+*}$ est bornée et $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in I, f_{n+1}(x) = \ln(1 + f_n(x))$. Montrer que la suite (f_n) converge simplement sur \mathbb{R} et déterminer sa limite.
4. Étudier la convergence uniforme de la suite (f_n) puis les modes de convergence de la série $\sum (-1)^n f_n$.

Exercice 11 (Centrale PSI 2025) [Indication] [Solution]

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de fonctions, définies sur $[0, 1]$ par $f_0(t) = 1$ et $\forall t \in [0, 1], f_{n+1}(t) = \int_0^t 2\sqrt{f_n(u)} \, du$.

1. Montrer qu'il existe deux suites (α_n) et (β_n) telles que $\forall t \in [0, 1], f_n(t) = \alpha_n t^{\beta_n}$.
2. Montrer que la suite (f_n) converge simplement sur $[0, 1]$ vers une fonction f à déterminer.
3. Montrer que, si $\beta \in [1, 2]$ et $t \in [0, 1], |t^2 - t^\beta| \leq t |\ln t| \times |\beta - 2|$ et en déduire la convergence uniforme de (f_n) .

Exercice 12 (Centrale PSI 2025) [Indication] [Solution]

Soient $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ et $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$.

1. Calculer $P(X)^2$ et en déduire $\sum_{0 \leq p, q \leq n} \frac{a_p a_q}{p+q+1} \geq 0$.
2. Calculer, pour $k \in \mathbb{Z}, \int_{-\pi}^{\pi} e^{ikt} \, dt$ et en déduire la valeur de $\int_0^{\pi} |P(e^{it})|^2 \, dt$.
3. Pour $Q \in \mathbb{C}[X]$, montrer que $\int_{-1}^1 Q(x) \, dx = -i \int_0^{\pi} Q(e^{it}) e^{it} \, dt$.
4. En déduire une majoration de $\sum_{0 \leq p, q \leq n} \frac{a_p a_q}{p+q+1}$.

Exercice 13 (Centrale PSI 2025) [Indication] [Solution]

Soient (Ω, \mathcal{A}, P) un espace probabilisé et $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une famille d'événements indépendants.

1. a) Rappeler la propriété de continuité monotone.
 b) En déduire $P\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\bigcup_{k=0}^n A_k\right)$.
 c) En déduire $P\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = 1 - \lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=0}^n P(\overline{A_k})$.
2. Montrer que $P\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = 1$ si et seulement si $\sum \ln P(\overline{A_n})$ diverge.
3. Montrer que $P\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = 1$ si et seulement si $\sum P(A_n)$ diverge.

Exercice 14 (Centrale PSI 2025) [Indication] [Solution]

Pour $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on pose $C_M = \{P^{-1}MP, P \in \mathcal{GL}_2(\mathbb{R})\}$.

1. Montrer que tous les éléments de C_M ont la même trace et le même déterminant. La réciproque est-elle vraie ?
2. Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ trigonalisable mais non diagonalisable. Montrer que C_M n'est pas borné. C_M est-il fermé ?
3. Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ diagonalisable. Montrer que C_M est fermé.

CCINP

Exercice 15 (CCINP PSI 2025) [Indication] [Solution]

1. Soit $a_n = \int_0^1 \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^n \, dt$
 - a) Montrer que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite
 - b) Déterminer la nature de $\sum (-1)^n a_n$
 - c) Soient $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et R le rayon de convergence de cette série entière.
 Montrer que $a_n \geq \frac{1}{2n+1}$ et en déduire la valeur de R .
 - d) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, (2n+3)a_{n+1} = 1 + (n+1)a_n$ et en déduire une équation différentielle d'ordre 1 vérifiée par f .
2. Soient E un espace vectoriel de dimension finie, p et q deux endomorphismes de E tels que $p+q = id_E$ et $\text{rg}(p) + \text{rg}(q) \leq \dim(E)$.

- Montrer que $E = \text{Im}(p) \oplus \text{Im}(q)$.
- Montrer que p et q sont des projecteurs.

Exercice 16 (CCINP PSI 2025) [Indication] [Solution]

- Soient $I = [-a, a]$ et φ continue sur I pour laquelle il existe $c > 0$ tel que $\forall x \in I, |\varphi(x)| \leq C|x|$. On cherche les fonctions f , définies sur I , continues en 0 et telles que
$$\begin{cases} f(x) - f\left(\frac{x}{2}\right) = \varphi(x) & \text{pour } x \in I \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

- Montrer que $S : x \mapsto \sum_{n \geq 0} \varphi\left(\frac{x}{2^n}\right)$ est définie et continue sur I .
 - Montrer que S est solution du problème posé
 - Montrer que la différence de 2 solutions du problème est nulle; que peut-on en déduire sur l'ensemble des solutions?
 - On suppose φ de classe \mathcal{C}^1 sur I , montrer que f est aussi \mathcal{C}^1 sur I .
- Rappeler l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
 - Soit $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ avec $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, x_i > 0$ et $\sum_{i=1}^n x_i = 1$. Montrer que $n^2 \leq \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}$ puis caractériser le cas d'égalité.

Exercice 17 (CCINP PSI 2025) [Indication] [Solution]

- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ antisymétrique et f canoniquement associé; on munit \mathbb{R}^n du produit scalaire canonique.

- Montrer que $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2, (x|f(y)) = -(f(x)|y)$
- Montrer que $\det(f) = (-1)^n \det(A)$. Qu'en déduit-on?
- Montrer que f induit sur $\text{Im}(f)$ un endomorphisme injectif. Que peut-on en déduire sur $\dim(\text{Im}(f))$?
- On suppose $n = 3$. Montrer qu'il existe une base \mathcal{B} de \mathbb{R}^3 telle que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a \\ 0 & a & 0 \end{pmatrix}$.
 f est-il diagonalisable?

- Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ une fonction développable en série entière sur $] -R, R[$. Donner la valeur de a_n .
 - Soit $g(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$ Montrer qu'il existe $P_n \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $\forall x > 0, g^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{2n}} e^{-1/x}$.
 - En déduire que $g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$. Est-elle développable en série entière?

Exercice 18 (CCINP PSI 2025) [Indication] [Solution]

- Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\phi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par $\phi(M) = AM$.

- Montrer que ϕ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}, \phi^k(M) = A^k M$.
- Montrer que, si $P \in \mathbb{R}[X]$, alors P annule ϕ si et seulement si P annule A .
- En déduire que A est diagonalisable si et seulement si ϕ est diagonalisable.
- Montrer que les valeurs propres de A sont les valeurs propres de ϕ ; on pourra utiliser les colonnes de la matrice M , si M est un vecteur propre de ϕ .
- Déterminer une base des espaces propres de ϕ en utilisant une base des espaces propres de A .

- Définir le reste d'une intégrale convergente.

- Soit $I_n = \int_n^{+\infty} e^{-x^2} dx$. Montrer que I_n existe.
- Montrer que les séries de terme général I_n et nI_n convergent.

Exercice 19 (CCINP PSI 2025) [Indication] [Solution]

- Soient $u_n(x) = (-1)^{n+1} \frac{e^{-nx}}{n}$ et $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ lorsque la série converge.

- Déterminer le domaine de définition D de S .
- Montrer que S est continue sur D .
- Montrer que S est dérivable sur \mathbb{R}^{+*} .
- Déterminer la valeur de S sur D .
- Montrer que S est intégrable sur \mathbb{R}^+ .

f) Calculer $\int_0^{+\infty} S(x) dx$, sachant $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

2. Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $B = AB - BA$.
- Calculer $\text{Tr}(B)$. B est-elle inversible ?
 - Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}, AB^k - B^kA = kB^k$.
 - Montrer que B est nilpotente.

Exercice 20 (CCINP PSI 2025) [Indication] [Solution]

1. Soit $f(x) = \int_0^1 \frac{\ln(1+xt)}{t} dt$.
- Montrer que f est définie sur $] -1, 1[$.
 - Écrire f sous la forme d'une série entière.
 - Montrer que f est \mathcal{C}^1 sur $]0, 1[$ et calculer $f'(x)$.
 - Retrouver la valeur de $f'(x)$ d'une autre façon.
2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 - 5A + 6I_n = 0$.
- Donner deux conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une matrice soit diagonalisable.
 - Montrer que A est diagonalisable et que $\text{Sp}(A) \subset \{2, 3\}$.
 - Soit D une matrice diagonale semblable à A et $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par $f(M) = DM - MD$.
Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et que f est diagonalisable ; on pourra écrire les matrices M et D par blocs.

Exercice 21 (CCINP PSI 2025) [Indication] [Solution]

1. a) Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 2b \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que A soit diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
- b) Soit X une variable aléatoire discrète telle que $X \sim \mathcal{G}(p)$. Donner, pour $n \in \mathbb{N}$, la valeur de $P(X > n)$.
- c) Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes indépendantes telles que $X \sim \mathcal{G}(p_1)$ et $Y \sim \mathcal{G}(p_2)$. On pose $M = \begin{pmatrix} 0 & X \\ -X & 2Y \end{pmatrix}$. Déterminer la probabilité que M soit diagonalisable.
- d) On suppose cette fois que X et Y sont indépendantes et $X \sim Y \sim \mathcal{B}\left(n, \frac{1}{2}\right)$. Quelle est la limite?????????
2. Pour $n \geq 1$, on pose $f_n(x) = \frac{x^2}{x^2 + n^2} + \sin(x)$.
- Montrer que (f_n) converge simplement sur \mathbb{R} vers une fonction f à déterminer.
 - À-t-on convergence uniforme sur $[-a, a]$ pour $a > 0$?
 - À-t-on convergence uniforme sur \mathbb{R} ?
 - Étudier les modes de convergence de la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} (f_n - f)$.

Exercice 22 (CCINP PSI 2025) [Indication] [Solution]

1. Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ avec $n \geq 1$
- Montrer que si u est diagonalisable alors u^2 est diagonalisable
 - Montrer que la réciproque est fautive
 - Pour $\lambda \in \mathbb{C}^*$, montrer $\ker(u^2 - \lambda^2 id) = \ker(u - \lambda id) \oplus \ker(u + \lambda id)$
 - Montrer que la réciproque de a) est vraie si u est bijectif ou si $\ker(u) = \ker(u^2)$.
2. Une urne contient des boules rouges et des boules vertes. La probabilité de tirer une boule rouge est $p \in]0, 1[$. On effectue dans cette urne une infinité de tirages avec remise.
- On note X_1 le nombre de tirages nécessaires pour obtenir une première boule rouge. Déterminer la loi et l'espérance de X_1 .
 - On note X_2 le nombre de tirages nécessaires pour obtenir une deuxième boule rouge. Déterminer la loi et l'espérance de X_2 .

Exercice 23 (CCINP PSI 2025) [Indication] [Solution]

1. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $a_0 = a_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+2} = a_{n+1} + \frac{a_n}{n+2}$
- Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, a_n > 0$ puis étudier la monotonie de (a_n) .
 - Montrer que $\sum (a_{n+1} - a_n)$ diverge et en déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$.

- c) On pose $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. Déterminer le rayon de convergence de cette série entière.
- d) Montrer que S vérifie $(x-1)S'(x) + (x+1)S(x) = 0$ et en déduire la valeur de $S(x)$.
- e) Montrer que $a_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} (n+1-k)$.
- f) Déterminer un équivalent de a_n quand n tend vers $+\infty$

2. Pour $n \geq 3$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $f(M) = M - M^T$.

- a) Montrer que f est un endomorphisme.
- b) Préciser $\ker(f)$ et en donner sa dimension. f est-il bijectif?
- c) Montrer que f est diagonalisable et calculer \mathcal{X}_f .

Exercice 24 (CCINP PSI 2025) [Indication] [Solution]

1. a) Soient (u_n) et (v_n) deux suites avec $\forall n \in \mathbb{N}, v_n \geq 0$. On suppose que $\sum v_n$ converge. On pose $U_n = \sum_{k=n}^{+\infty} u_k$, si

$$\sum u_n \text{ converge, et } V_n = \sum_{k=n}^{+\infty} v_k$$

- i. On suppose $u_n = o(v_n)$. Montrer que $U_n = o(V_n)$
- ii. On suppose $u_n \sim v_n$. Montrer que $U_n \sim V_n$.

b) Le but de cette question est d'améliorer la formule de Stirling. On pose $a_n = \ln \left(\frac{n! e^n}{n^{n+1/2}} \right)$ et $u_n = a_{n+1} - a_n$.

i. En remarquant que $\frac{1}{n^2} \sim \frac{1}{n(n+1)}$, déterminer un équivalent de $R_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$.

ii. Trouver un équivalent de u_n puis un développement de a_n avec la précision $o\left(\frac{1}{n}\right)$.

iii. Conclure

2. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de rang 1, avec $n \geq 2$.

- a) Détermine une valeur propre de M .
- b) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que M soit diagonalisable.

Exercice 25 (CCINP PSI 2025) [Indication] [Solution]

1. Soient $f(x) = \frac{x}{\operatorname{sh} x}$ et $f_n(x) = \frac{1}{\operatorname{sh}^2 nx}$

a) f est-elle prolongeable par continuité en 0. Montrer que f est bornée sur \mathbb{R}

b) Montrer que $\sum_{n \geq 1} f_n$ CVS sur \mathbb{R}^* ; on pose $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$.

c) Montrer que S est \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^{+*}

d) Exprimer f_n à l'aide de f et en déduire un équivalent simple de S en 0

e) Montrer que f est \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} .

2. ?

Exercice 26 (CCINP PSI 2025) [Indication] [Solution]

1. Soit $f(x, y) = \begin{cases} \frac{3xy^3 - x^3y}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

a) Montrer que f est \mathcal{C}^2 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$

b) Montrer que f est \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^2 .

c) Calculer $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$; f est-elle \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R}^2 ?

2. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 - 3f + 2\operatorname{id}_E = 0$.

a) Montrer que f est un automorphisme de E .

b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe x_n, y_n tels que $f^n = x_n f + y_n \operatorname{id}_E$.

c) Déterminer x_n et y_n . La relation est-elle aussi valable pour $n \in \mathbb{Z}$?

Exercice 27 (CCINP PSI 2025) [Indication] [Solution]

- Soit $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{x^2 + n^2}$.
 - Déterminer le domaine de définition D de f .
 - Montrer que f est continue sur D .
 - La série converge-t-elle normalement sur D ?
 - Déterminer la limite en $+\infty$ de f .
- Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré impair. Montrer que P admet au moins une racine réelle.
 - Soit $A \in \mathcal{SO}_{2n+1}(\mathbb{R})$. Montrer que 1 est valeur propre de A .

Exercice 28 (CCINP PSI 2025) [Indication] [Solution]

- La probabilité qu'une famille ait $n \in \mathbb{N}$ enfants est, pour $n \geq 1$, $p_n = \alpha \lambda^n$ avec $\alpha > 0$ et $\lambda \in]0, 1[$. À chaque naissance, la probabilité que l'enfant soit un garçon est, indépendamment des autres naissances, $p \in]0, 1[$.
 - Quelle est la probabilité que la famille n'ait aucun enfant ?
 - Montrer, pour $x \in]-1, 1[$, $\sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} x^{n-k} = \frac{1}{(1-x)^{k+1}}$
 - Quelle est la probabilité que la famille ait exactement k garçons ?
 - Quelle est la probabilité pour une famille qui a déjà un enfant d'en avoir au moins un deuxième ?
- Soit $I = \int_0^1 \frac{\ln t}{t^2 - 1} dt$.
 - Montrer que I existe.
 - Montrer que $I = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$

Exercice 29 (CCINP PSI 2025) [Indication] [Solution]

- On lance une pièce équilibrée une infinité de fois. On note Y le rang d'apparition du premier « pile » et X le rang d'apparition de la première séquence « pile, face » (si $(X = n)$ on a « pile » au lancer $n - 1$ et « face » au lancer n).
 - Déterminer la loi et l'espérance de Y .
 - Déterminer la loi du couple (X, Y) puis la loi de X .
 - Calculer, pour $|x| < 1$, la valeur de $\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)x^{k-2}$ puis l'espérance de X .
 - Déterminer $V(X)$.
- Soient E préhilbertien réel et (e_1, \dots, e_n) une famille de vecteurs unitaires vérifiant $\forall x \in E, \sum_{j=1}^n (e_j | x)^2 = \|x\|^2$.
 - Montrer que cette famille est orthonormale.
 - Montrer que $\dim(E) = n$.

Exercice 30 (CCINP PSI 2025) [Indication] [Solution]

- Soit $a \in \mathbb{R}^+$, on définit, sur $I = [0, 1]$, la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ par $\forall n \geq 1, \forall x \in I, f_n(x) = \frac{nx(x^2 + a)}{nx + 1} e^{-x}$.
 - Montrer que (f_n) converge simplement sur I vers une fonction f à déterminer.
 - Discuter selon les valeurs de a de la convergence uniforme de (f_n) .
 - Montrer que si $h \in]0, 1[$ alors (f_n) converge uniformément sur $[h, 1]$, pour tout $a \in \mathbb{R}^+$.
- Soit D l'endomorphisme de $\mathbb{K}[X]$ défini par $\forall P \in \mathbb{K}[X], D(P) = P'$.
 - Soit F un sous espace de $\mathbb{K}[X]$, stable par D , et qui contient un polynôme P de degré d . Montrer que $\mathbb{K}_d[X] \subset F$.
 - Déterminer tous les sous espace de $\mathbb{K}[X]$ stables par D .

Exercice 31 (CCINP PSI 2025) [Indication] [Solution]

- On considère une urne contenant n boules numérotées de 1 à n dans laquelle on effectue des tirages avec remise. On déplace un pion, initialement en 0, sur une règle graduée de 0 à n de la façon suivante : on note X_p la position du pion avant le $p^{\text{ème}}$ tirage dans l'urne, si le numéro N_p de la boule tirée au $p^{\text{ème}}$ tirage vérifie $N_p \leq X_p$, on déplace le pion en $X_p - 1$ alors que si $N_p > X_p$, on le déplace en $X_p + 1$.
 - Déterminer $X_p(\Omega)$.
 - Déterminer $P(X_{p+1} = 0)$ (respectivement $P(X_{p+1} = n)$) en fonction de $P(X_p = 1)$ (respectivement $P(X_p = n - 1)$).
 - Pour $k \in \llbracket 1, n - 1 \rrbracket$, exprimer $P(X_{p+1} = k)$ en fonction de $P(X_p = k - 1)$ et $P(X_p = k + 1)$.

- d) Soit G_p la fonction génératrice de X_p . Pourquoi est-elle définie sur $[-1, 1]$? Pourquoi est-elle polynomiale?
- e) On admet la formule : $\forall t \in [-1, 1], G_{p+1}(t) = tG_p(t) + \frac{1-t^2}{n}G'_p(t)$. Montrer que $E(X_{p+1}) = 1 + \left(1 - \frac{2}{n}\right)E(X_p)$ puis la valeur de $E(X_p)$ et sa limite quand p tend vers $+\infty$.
- f) Déterminer la formule admise à la question précédente.

2. Soit $A = \begin{pmatrix} \alpha & 2 & 2 \\ 2 & \alpha & 2 \\ 2 & 2 & \alpha \end{pmatrix}$, où $\alpha \in \mathbb{R}$. La matrice A est-elle symétrique définie positive?

Exercice 32 (CCINP PSI 2025) [Indication] [Solution]

1. a) Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique réel $u_n \geq 1$ tel que $u_n - \ln(u_n) = n$.
 b) Déterminer la limite puis un équivalent de u_n .
 c) Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n - n - \ln(n) = 0$.
 d) Déterminer un asymptotique de u_n avec la précision $o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

2. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$. La matrice A est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$?

Mines-Télécom

Exercice 33 (Mines-Télécom PSI 2025) [Indication] [Solution]

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ -2 & 0 & 2 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$
- a) Déterminer un polynôme annulateur de A de degré 2 puis les valeurs propres de A .
 b) Déterminer A^n en fonction de A et I_3
 c) ?
2. Soit $f(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n + (-1)^n}$
- a) Déterminer le domaine de définition de f .
 b) Montrer que $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n + (-1)^n} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$
 c) Calculer $f(-1)$.
 d) f est-elle continue en -1 ?

Exercice 34 (Mines-Télécom PSI 2025) [Indication] [Solution]

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = A + I_n$.
- a) Montrer que A est inversible.
 b) Montrer que $\det(A) > 0$.
2. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe.
- a) Rappeler la définition d'une fonction convexe.
 b) On suppose qu'il existe $x_1 < x_2$ tels que $f(x_1) < f(x_2)$. Montrer que $\lim_{+\infty} f = +\infty$.
 c) On suppose qu'il existe $x_1 < x_2$ tels que $f(x_1) > f(x_2)$. Montrer que $\lim_{-\infty} f = +\infty$.
 d) On suppose f bornée. Montrer que f est constante.

Exercice 35 (Mines-Télécom PSI 2025) [Indication] [Solution]

1. Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes indépendantes suivant une loi de Poisson de paramètre λ et
- $$M = \begin{pmatrix} (-1)^X & 1 \\ (-1)^Y & 1 \end{pmatrix}$$
- a) Déterminer la probabilité que M soit inversible.
 b) Déterminer la probabilité que M soit diagonalisable dans \mathbb{C} puis dans \mathbb{R} .
2. Déterminer les solutions développables en série entière de $4xy'' + 2y' - y = 0$ et les exprimer à l'aide de fonctions usuelles.

Exercice 36 (Mines-Télécom PSI 2025) [Indication] [Solution]

- Soient $a \in \mathbb{R}$, $A \in \mathbb{R}_n[X]$ non nul et $f : P \in \mathbb{R}_n[X] \mapsto P(a)A$.
 - Vérifier que $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$ et déterminer $\text{rg}(f)$.
 - f est-il diagonalisable? Discuter selon les valeurs de a et A et donner une base des espaces propres.
 - On suppose f diagonalisable. Discuter de l'existence et de l'unicité des solutions de l'équation $P + P(a)A = B$ où $B \in \mathbb{R}_n[X]$ est fixé.
- Soit $f_n(x) = (\text{ch } x)^{-n}$.
 - f_n est-elle intégrable sur \mathbb{R}^+ .
 - Soit $I_n = \int_0^{+\infty} f_n(t) dt$. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.
 - Quelle est la nature de $\sum (-1)^n I_n$ et $\sum I_n$; on pourra vérifier que $\forall x \in \mathbb{R}^+, \text{ch } x \leq e^{x^2/2}$.
 - Déterminer le rayon de convergence de $\sum I_n x^n$.

Exercice 37 (Mines-Télécom PSI 2025) [Indication] [Solution]

- Déterminer un équivalent de $u_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{\sqrt{k}}$ de deux façons différentes : par une comparaison à une intégrale et en utilisant une somme de Riemann.
- Soit $(X_n)_{n \geq 2}$ une suite de variables aléatoires discrètes indépendantes telle que $X_n \sim \mathcal{B}\left(\frac{1}{n}\right)$. On pose $N = 0$ si $\forall k \geq 2, X_k = 1$ et $N = \min\{k \geq 2, X_k = 0\}$ sinon.
 - Montrer que $(N = 0)$ est négligeable.
 - Déterminer la loi de N .
 - Donner l'espérance et la variance de N .

Exercice 38 (Mines-Télécom PSI 2025) [Indication] [Solution]

- Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $\text{Sp}(A) \cap \text{Sp}(B) = \emptyset$.
 - Montrer que $\mathcal{X}_A(B)$ est inversible.
 - Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $AM = MB$. Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}, A^k M = MB^k$.
 - Montrer que $M = 0$.
- Soient A_1, \dots, A_n n points du plan. Pour $i \neq j$, on trace une arête entre A_i et A_j avec la probabilité p_n , indépendamment des éventuelles autres arêtes. On note X_i la variable aléatoire discrète telle que $X_i = 1$ si le point A_i est isolé et $X_i = 0$ sinon. On pose $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$.
 - Trouver la loi de X_i puis calculer $E(S_n)$.
 - Trouver une majoration de la probabilité qu'au moins un point soit isolé.
 - On suppose $p_n = \frac{\ln(n) + c}{n}$, avec $c > 0$. Montrer que, pour n suffisamment grand, on a $P(S_n = 0) > 0$.

Exercice 39 (Mines-Télécom PSI 2025) [Indication] [Solution]

- Soient $U \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert et $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^2 . On dit que f est harmonique si $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$.
 - Vérifier que $f : (x, y) \mapsto \arctan \frac{y}{x}$ est harmonique sur $\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}$.
 - Si $\varphi : \mathbb{R}^{+*} \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe \mathcal{C}^2 et $f(x, y) = \varphi(x^2 + y^2)$, montrer que f est harmonique sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ si et seulement si φ vérifie une équation différentielle.
 - Résoudre cette équation différentielle.
 - Énoncer le théorème de Cauchy-Lipschitz.
- Soit $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. Montrer que $\text{Tr}(AS) \leq \text{Tr}(S)$:
 - si S est diagonale.
 - dans le cas général.
 - Étudier le cas d'égalité si S est inversible.

Exercice 40 (Mines-Télécom PSI 2025) [Indication] [Solution]

- Déterminer les solutions développables en série entière de $xy'' + 2y' + xy = 0$.
- Soient p_1, \dots, p_m m endomorphismes non nuls de E , espace vectoriel de dimension finie. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\forall k \in \mathbb{N}, f^k = \sum_{i=1}^m \lambda_i^k p_i$, où les λ_i sont des réels deux à deux distincts.

- a) Montrer que $\forall P \in \mathbb{R}[X], P(f) = \sum_{i=1}^m P(\lambda_i)p_i$. En déduire que f est diagonalisable.
- b) Si L_1, \dots, L_m sont les polynômes d'interpolation de Lagrange aux points λ_i . Montrer que $p_i = L_i(f)$.
- c) Montrer que $\text{Im}(p_i) \subset \ker(f - \lambda_i \text{id}_E)$
- d) En déduire que $\text{Sp}(f) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}$ et que les p_i sont des projecteurs.

Exercice 41 (Mines-Télécom PSI 2025) [Indication] [Solution]

1. Pour $s \in \mathbb{Z}$, on pose $f_s(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^s}$ lorsque la série converge.
- a) Calculer $f_0(x)$ et $f_1(x)$ lorsque les séries convergent.
- b) Déterminer le rayon de convergence de la série entière.
- c) Déterminer D_s , le domaine de définition de f_s .
- d) Trouver une relation entre f_s et f_{s-1} ; on pourra dériver f_s lorsque c'est possible.
- e) Calculer f_{-1} et f_{-2} .
2. Si X est une variable aléatoire discrète à valeurs dans \mathbb{R} , on dit que X est presque sûrement bornée (PSB) s'il existe $M > 0$ tel que $P(|X| > M) = 0$.
- a) Si X et Y sont deux variables aléatoires discrètes à valeurs dans \mathbb{N} telles que $X + Y$ est PSB, montrer que X et Y sont PSB.
- b) On suppose $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$. Caractérisez le fait que X soit PSB à l'aide de sa fonction génératrice.
- c) Si X et Y sont indépendantes, à valeurs dans \mathbb{N} et si $X + Y \sim \mathcal{B}(n, p)$. Montrer que X et Y suivent des lois binomiales.

Exercice 42 (Mines-Télécom PSI 2025) [Indication] [Solution]

1. Développer en série entière $f : x \mapsto e^{x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt$.
2. Soient E un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension 3, \mathcal{B} une base de E et $u \in \mathcal{L}(E)$ dont la matrice dans la base \mathcal{B} est
- $$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
- a) Déterminer $\text{rg}(A - 2I_3)$.
- b) Déterminer une base de $E_2(u)$ et de $F = \ker[(u - \text{id})^2]$ et montrer que ces espaces sont supplémentaires.
- c) Soit $v \in \mathcal{L}(E)$ pour lequel il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $u = v^n$. Montrer que u et v commutent et en déduire que $E_2(u)$ et F sont stables par v .
- d) Déterminer v .

Exercice 43 (Mines-Télécom PSI 2025) [Indication] [Solution]

1. Déterminer les solutions développables en série entière de $xy'' - 2y' + xy = 0$ telles que $y(0) = 1$.
2. Que dire de $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^5 + A^4 + A^3 + A^2 + A = 0$?

Exercice 44 (Mines-Télécom PSI 2025) [Indication] [Solution]

1. Soit f un endomorphisme de E tel que $f^2 - 5f + 6\text{id}_E = 0$.
- a) Montrer que $E = \ker(f - 2\text{id}_E) \oplus \ker(f - 3\text{id}_E)$.
- b) Si on suppose E de dimension finie, f est-il diagonalisable?
2. On pose $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$.
- a) Déterminer le domaine de définition D de ζ .
- b) ζ est-elle continue sur D ?
- c) ζ est-elle \mathcal{C}^1 sur D ?
- d) Étudier les variations de ζ .
- e) Tracer le graphe de ζ .

Exercice 45 (Mines-Télécom PSI 2025) [Indication] [Solution]

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 2 & c \\ 0 & 0 & d \end{pmatrix}$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que A soit diagonalisable.
2. Pour $k \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_k = a^k \frac{(n+2)!}{(n+k+2)!}$

- a) Montrer que $\sum u_k$ converge et $\left| \sum_{k=0}^{+\infty} u_k \right| \leq e^{|a|}$.
- b) On pose $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{a^k}{k!}$. Montrer que $R_n \sim \frac{a^{n+1}}{(n+1)!}$.
- c) En déduire la nature de la série de terme général $v_n = \sin(2\pi en!)$.

Exercice 46 (Mines-Télécom PSI 2025) [Indication] [Solution]

1. Soit $f(x) = \int_0^{+\infty} \ln(t)e^{-xt} dt$.
- a) Montrer que f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^{+*} .
- b) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que $f'(x) = -\frac{f(x)}{x} - \frac{1}{x^2}$.
- c) En déduire qu'il existe une constante $c \in \mathbb{R}$, telle que $f(x) = \frac{c - \ln(x)}{x}$.
2. On lance une infinité de fois une pièce qui donne pile avec la probabilité $\frac{1}{3}$ et face avec la probabilité $\frac{2}{3}$. On note X la variable aléatoire discrète qui donne le rang de la première apparition de 2 piles consécutifs.
- a) Déterminer $P(X=2)$, $P(X=3)$ et $P(X=4)$.
- b) Montrer que, pour $n \geq 4$, $p_n = \frac{2}{3}p_{n-1} + \frac{2}{9}p_{n-2}$ où $p_n = P(X=n)$.
- c) Déterminer la loi de X .
- d) Calculer l'espérance de X .

Exercice 47 (Mines-Télécom PSI 2025) [Indication] [Solution]

1. Soient $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle pour laquelle la série entière $\sum_{n \geq 1} a_n x^n$ possède un rayon de convergence égal à 1.
- a) Montrer que $\sum_{n \geq 1} a_n \frac{x^n}{1-x^n}$ est absolument convergente pour $x \in]-1, 1[$.
- b) Montrer que $S : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \frac{x^n}{1-x^n}$ est continue sur $] -1, 1[$.
- c) Montrer que S est de classe \mathcal{C}^1 sur $] -1, 1[$.
2. a) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ nilpotente, c'est-à-dire pour laquelle il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^k = 0$. Montrer que $A^n = 0$.
- b) Montrer que l'équation, d'inconnue $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, $X^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ n'a pas de solution.

Exercice 48 (Mines-Télécom PSI 2025) [Indication] [Solution]

1. Soit (u_n) définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 2$, $u_2 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+3} = u_n + u_{n+1}$
- a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq 2^n$.
- b) En déduire que le rayon de convergence R de $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ est strictement positif.
- c) Montrer que la somme f de la série entière précédente vérifie, pour $|x| < R$, $f(x) = \frac{2x + 3x^2}{1 - x^2 - x^3}$.
- d) Déterminer la valeur de R en fonction des racines du polynôme $X^3 + X^2 - 1$.
2. a) Montrer que $(P|Q) = \int_{-1}^1 \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
- b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on admet qu'il existe $T_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\forall \theta \in [0, \pi]$, $T_n(\cos \theta) = \cos(n\theta)$. Déterminer le degré et le coefficient dominant de T_n .
- c) Montrer que $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une famille orthogonale et calculer $\|T_n\|$.

Exercice 49 (Mines-Télécom PSI 2025) [Indication] [Solution]

1. On considère $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni de son produit scalaire canonique et $H = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \text{Tr}(M) = 0\}$
- a) Montrer que H est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et déterminer sa dimension.
- b) Trouver H^\perp .
- c) Calculer $d(I_n, H)$.
2. a) Soit $g : x \mapsto xe^{\frac{1}{x}} + e^x$. Montrer que g réalise une bijection de \mathbb{R}^{-*} sur $] -\infty, 1[$ et résoudre $g(x) = 0$.
- b) Étudier les extremums locaux de $f : (x, y) \mapsto xe^y + ye^x$ sur \mathbb{R}^2 .

Indications

- Exercice 1** [sujet] 1. a) Commencer par poser $x = nt$
2. a) Pour $\varphi(A) = \varphi(B)$, calculer $\text{Tr}(AB^{-1})$ en fonction des valeurs propres de AB^{-1}
b) Introduire une base de F formée de vecteurs de G .
- Exercice 2** [sujet] 2. Tester $P = X$ et $P = X^2$.
- Exercice 3** [sujet]
- Exercice 4** [sujet] 5. Commencer par $\lambda = 0$ puis, pour $\lambda \neq 0$, vérifier qu'un vecteur propre est nécessairement dérivable.
- Exercice 5** [sujet] 2. c) Introduire une fonction de deux variables en posant $z = x + iy$.
- Exercice 6** [sujet] 2. Considérer $\ln(p_n)$ lorsque c'est possible.
- Exercice 7** [sujet] 3. Réécrire la limite simple sous la même forme que précédemment et découper l'intégrale pour utiliser la linéarité de la somme et de l'intégrale.
- Exercice 8** [sujet]
- Exercice 9** [sujet]
- Exercice 10** [sujet] 4. Utiliser la suite (u_n) pour majorer $\|f_n\|_\infty$.
- Exercice 11** [sujet] 3. IAF
- Exercice 12** [sujet] 2. $|z|^2 = z \times \bar{z}$
4. Même si la question précédente fait apparaître des complexes, il s'agit d'intégrales à valeurs réelles dans le cas où $Q \in \mathbb{R}[X]$.
- Exercice 13** [sujet] 3. Chercher un équivalent de $\ln P(\overline{A_n})$ en examinant si $P(A_n)$ tend vers 0.
- Exercice 14** [sujet]
- Exercice 15** [sujet]
- Exercice 16** [sujet]
- Exercice 17** [sujet]
- Exercice 18** [sujet]
- Exercice 19** [sujet] 2. c) Raisonner par l'absurde et introduire l'endomorphisme $M \mapsto AM - MA$.
- Exercice 20** [sujet]
- Exercice 21** [sujet]
- Exercice 22** [sujet]
- Exercice 23** [sujet]
- Exercice 24** [sujet] 1. a) Utiliser les définitions (ε -def pour la première)
- Exercice 25** [sujet]
- Exercice 26** [sujet]
- Exercice 27** [sujet]
- Exercice 28** [sujet]
- Exercice 29** [sujet]
- Exercice 30** [sujet] 2. b) Discuter selon qu'il est de dimension finie ou non et introduire, si possible, un polynôme de degré maximal.

Exercice 31 [sujet]

Exercice 32 [sujet] 1. d) $u_n = n + \ln(u_n)$ puis améliorer la précision en réinjectant les DL jusqu'à la précision demandée.

2. Étudier les variations de \mathcal{X}_A .

Exercice 33 [sujet] 2. d) Introduire $g(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n} x^n$ et montrer que $f - g$ est continue en -1 .

Exercice 34 [sujet]

Exercice 35 [sujet]

Exercice 36 [sujet]

Exercice 37 [sujet] 1. Pour la somme de Riemann, commencer par poser $k = h + n$.

Exercice 38 [sujet]

Exercice 39 [sujet] 2. Vérifier que $|a_{i,j}| \leq 1$.

Exercice 40 [sujet]

Exercice 41 [sujet]

Exercice 42 [sujet]

Exercice 43 [sujet]

Exercice 44 [sujet]

Exercice 45 [sujet] 2. b) Majorer $\left| R_n - \frac{n+1}{(n+1)!} \right|$

Exercice 46 [sujet]

Exercice 47 [sujet]

Exercice 48 [sujet]

Exercice 49 [sujet]