

Oral TD1 : révisions de première année

Exercice 1 (Mines-Télécom PSI 2023)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \left(n \sin \frac{1}{n}\right)^{n^2}$. Déterminer $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

Exercice 2 (Mines-Ponts PSI 2022)

Soit $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$, pour $n \geq 1$.

1. Montrer qu'il existe $\gamma \in \mathbb{R}$ telle que $H_n = \ln(n) + \gamma + o(1)$
2. Déterminer la limite de $(H_{2n} - H_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$
3. On pose $a_n = \sum_{k=1}^n k^2$. Justifier la convergence et calculer la somme de $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{a_n}$

Exercice 3 (CCINP PSI 2025)

1. Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique réel $u_n \geq 1$ tel que $u_n - \ln(u_n) = n$.
2. Déterminer la limite puis un équivalent de u_n .
3. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n - n - \ln(n) = 0$.
4. Déterminer un asymptotique de u_n avec la précision $o\left(\frac{1}{n^2}\right)$. (*)

Exercice 4 (Mines-Télécom PSI 2025)

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe.

1. Rappeler la définition d'une fonction convexe.
2. On suppose qu'il existe $x_1 < x_2$ tels que $f(x_1) < f(x_2)$. Montrer que $\lim_{+\infty} f = +\infty$.
3. On suppose qu'il existe $x_1 < x_2$ tels que $f(x_1) > f(x_2)$. Montrer que $\lim_{-\infty} f = +\infty$.
4. On suppose f bornée. Montrer que f est constante.

Exercice 5 (Mines-Télécom PSI 2025)

Déterminer un équivalent de $u_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{\sqrt{k}}$ de deux façons différentes : par une comparaison à une intégrale et en utilisant une somme de Riemann. (*)

Exercice 6 (Mines-Ponts PSI 2024)

Soit $P = X^4 - 8X^3 + 12X^2 - 8X + 1$

1. Montrer que si z est racine de P alors $\frac{1}{z}$ est aussi racine de P
2. Montrer que P possède une racine réelle $\alpha > 1$
3. On note β une racine complexe de P distincte de α et $\frac{1}{\alpha}$ et on pose $t = \alpha + \frac{1}{\alpha}$ et $s = \beta + \frac{1}{\beta}$.
Montrer que $s + t = 8$ et $st = 10$. (*)
4. En déduire $t > 2$ et que s est un réel tel que $0 < s < 2$. (*)
5. Montrer que β n'est pas réel et que β est de module 1.

Exercice 7 (Mines-Ponts PSI 2023)

Prouver l'existence et l'unicité d'une fonction $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ continue bornée, telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, f(x) = 2 + \int_0^x \frac{e^{-t^2}}{2 + f(t)^2} dt. (*)$$

Indications

Exercice 3

4. $u_n = n + \ln(u_n)$ puis améliorer la précision en réinjectant les DL jusqu'à la précision demandée.

Exercice 5

Pour la somme de Riemann, commencer par poser $k = h + n$.

Exercice 6

3. Écrire P sous forme factorisée et identifier ses coefficients en fonction de α et β .

4. s et t sont solutions d'un polynôme du second degré.

Exercice 7

a) Montrer que f est nécessairement dérivable.

b) Si $G : x \mapsto 2x + \frac{1}{3}x^3$, calculer $G(f(x))$ puis vérifier que G est bijective et déterminer f à l'aide de G^{-1} (sans chercher G^{-1}).

c) Montrer que f est bien bornée.