

Corrigé TD1 : révisions de première année

Exercice 7 (Mines-Ponts PSI 2023)

Prouver l'existence et l'unicité d'une fonction $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ continue bornée, telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, f(x) = 2 + \int_0^x \frac{e^{-t^2}}{2 + f(t)^2} dt.$$

Si f est une solution du problème alors f est continue sur \mathbb{R}^+ donc, comme $1 + f(t)^2 > 0$, la fonction $t \mapsto \frac{e^{-t^2}}{2 + f(t)^2}$ est elle aussi continue sur \mathbb{R}^+ . On en déduit que la fonction $x \mapsto \int_0^x \frac{e^{-t^2}}{2 + f(t)^2} dt$ est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^+ . Comme cette fonction coïncide avec f , la fonction f est nécessairement de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^+ .

On peut donc, toujours en supposant que f est une solution, dériver la relation, ce qui donne $f'(x) = \frac{e^{-x^2}}{2 + f(x)^2}$ donc $f'(x) [2 + f(x)^2] = e^{-x^2}$. De plus, la relation initiale donne aussi $f(0) = 2$. Si on intègre terme à terme l'égalité précédente, on obtient, compte tenu de $f(0) = 2$, $2f(x) + \frac{1}{3}f(x)^3 = \frac{20}{3} + \int_0^x e^{-t^2} dt$, car $h : x \mapsto \int_0^x e^{-t^2} dt$ est la primitive qui s'annule en 0 de $t \mapsto e^{-t^2}$. Si on définit la fonction G par $G : u \mapsto 2u + \frac{1}{3}u^3$, on peut réécrire la relation précédente sous la forme $G(f(x)) = \frac{20}{3} + h(x)$.

Comme G est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} et $G'(u) = 2 + u^2 > 0$, la fonction G réalise une bijection de \mathbb{R} sur $G(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. On peut donc inverser la dernière relation en $f(x) = G^{-1}\left(\frac{20}{3} + h(x)\right)$. Ceci prouve que si une solution f existe alors elle est unique.

On vérifie maintenant que la fonction $f : x \mapsto G^{-1}\left(\frac{20}{3} + h(x)\right)$ est bien une solution : il suffit de remonter le raisonnement précédent (presque toutes les lignes étaient équivalentes mais mieux vaut le vérifier simplement). Comme G est de classe \mathcal{C}^1 , bijective et que $G'(x)$ ne s'annule pas, la fonction G^{-1} est elle aussi de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} ; comme h est \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^+ , par composition f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^+ . On a aussi $G(f(x)) = \frac{20}{3} + h(x)$ donc, en dérivant cette égalité, avec $G'(u) = 2 + u^2$, on trouve $f'(x) + 2f'(x)f(x)^2 = h'(x) = e^{-x^2}$, puis $f'(x) = \frac{e^{-x^2}}{2 + f(x)^2}$. On a aussi $f(0) = G^{-1}\left(\frac{20}{3}\right) = 2$ car $G(2) = \frac{20}{3}$.

Reste à intégrer terme à terme la dernière égalité pour remonter à $f(x) = 2 + \int_0^x \frac{e^{-t^2}}{1 + f(t)^2} dt$. Ainsi il existe bien une unique solution à cette équation.

Pour finir, on prouve que cette solution est bornée : comme $t \mapsto e^{-t^2}$ est intégrable sur \mathbb{R}^+ , la fonction h est bornée sur \mathbb{R}^+ , $|h| \leq C$. La fonction G^{-1} est continue sur le segment $\left[\frac{20}{3} - C, \frac{20}{3} + C\right]$ donc bornée sur ce segment. On en déduit que f est elle aussi bornée sur \mathbb{R}^+ .

Le texte pouvait laisser penser que l'équation admettait plusieurs solutions, parmi lesquelles une seule était bornée. En fait ce n'est pas le cas : il n'y a de toute façon qu'une seule solution et cette unique solution est bornée.

Même une fois arrivé à la relation $f'(x)(2 + f(x)^2) = e^{-x^2}$ et $f(0) = 2$, on ne peut pas utiliser le théorème de Cauchy-Lipschitz pour justifier que ce problème de Cauchy admet une unique solution car l'équation différentielle $y'(1 + y^2) = e^{-x^2}$ n'est pas une équation différentielle linéaire.