Oral TD2 : réduction des endomorphismes

Exercice 1 **(CCINP PSI 2023)**
Soit A symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3+4A^2+5A=0$

1. Justifier que A est diagonalisable
2. Montrer que les valeurs propres de A sont racines de X^3+4X^2+5X
3. Trouver A

Exercice 2 **(CCINP PSI 2025)**
Soit $f\in\mathcal{L}(E)$ tel que $f^2-3f+2id_E=0$.

1. Montrer que f est un automorphisme de E.
2. Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, il existe x_n,y_n tels que $f^n=x_nf+y_nid_E$.
3. Déterminer x_n et y_n. La relation est-elle aussi valable pour $n\in\mathbb{Z}$?

Exercice 3 **(CCINP PSI 2025)**
Soit $A=\begin{pmatrix}1&\alpha&0\\0&1&1\\1&0&-1\end{pmatrix}$ avec $\alpha\in\mathbb{R}$. La matrice A est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$? *(*)*

Exercice 4 **(Mines-Télécom PSI 2025)**

1. Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ nilpotente, c'est-à-dire pour laquelle il existe $k\in\mathbb{N}^*$ tel que $A^k=0$. Montrer que $A^n=0$.
2. Montrer que l'équation, d'inconnue $X\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, $X^2=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$ n'a pas de solution.

Exercice 5 **(Centrale PSI 2023)**
Soient E un espace vectoriel de dimension $n\geqslant 2$, u et v deux symétries telles que $u\circ v=-v\circ u$

1. Montrer que n est pair
2. On pose $F^+=\ker(u+id)$ et $F^-=\ker(u-id)$. Montrer que $v(F^+)=F^-$, $v(F^-)=F^+$ et $E=F^+\oplus F^-$
3. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E et $A\in\mathcal{GL}_p(\mathbb{K})$ telles que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)=\begin{pmatrix}I_p&0\\0&-I_p\end{pmatrix}$ et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(v)=\begin{pmatrix}0&A\\A^{-1}&0\end{pmatrix}$ où $n=2p$.

Exercice 6 **(CCINP PSI 2024)**
Soient $A,B\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $AB=BA$ et $M=\begin{pmatrix}A&B\\0&A\end{pmatrix}$

1. Montrer que si U et V sont semblables et $R\in\mathbb{R}[X]$ alors $R(U)$ et $R(V)$ sont semblables.
2. Calculer $P(M)$ pour $P\in\mathbb{R}[X]$, en fonction de $P(A)$, $P'(A)$ et B
3. Montrer que si A est diagonalisable et $B=0$ alors M est diagonalisable.
4. Soit $\lambda\notin\mathrm{Sp}(A)$, justifier que $A-\lambda I_n$ est inversible.
5. Montrer que si M est diagonalisable alors A est diagonalisable et B est nulle

Exercice 7 **(Mines-Ponts PSI 2024)**
Soit A une matrice carrée d'ordre n, montrer l'équivalence entre les deux propositions

i) A est nilpotente
ii) $\mathrm{Tr}(A)=\mathrm{Tr}(A^2)=\cdots=\mathrm{Tr}(A^n)=0$ *(*)*

Indications

Exercice 3

Étudier les variations de $\mathcal{X}_A$.

Exercice 7

Calculer ces traces en utilisant les valeurs propres de A