

Oral TD3 : séries et intégrabilité

Exercice 1 (CCINP PSI 2024)

1. Énoncer le critère spécial des séries alternées
2. Étudier la nature de $\sum_{n \geq 1} \cos \left[\pi n^2 \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) \right]$

Exercice 2 (Centrale PSI 2025)

Soit $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ admettant un $DL_k(+\infty)$, $k \geq 2$, de la forme $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \dots + \frac{a_k}{x^k} + o\left(\frac{1}{x^k}\right)$.

1. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que la série $\sum_{n \geq 1} f(n)$ converge.
2. On pose $p_n = \prod_{k=2}^n f(k)$. À quelles conditions la suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est-elle convergente? (*)

Exercice 3 (CCINP PSI 2023)

Soit $u_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}}$, pour $n \geq 1$

1. Montrer que u_n existe et tend vers 0
2. On pose $v_n = \frac{(-1)^n}{n} u_n$. Montrer que $\sum v_n$ converge
3. On pose $w_n = \frac{(-1)^n}{n} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}}$. Quelle est la nature de $\sum w_n$?
4. On pose $x_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}}$. Quelle est la nature de $\sum x_n$?

Exercice 4 (Mines-Télécom PSI 2022)

Soient $\alpha > 0$, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs, $S_n = \sum_{k=1}^n u_k$ et $w_n = \frac{u_n}{S_n^\alpha}$.

1. On suppose que $\sum u_n$ converge. Quelle est la nature de $\sum w_n$? (*)
2. On suppose $u_n = n$. Nature de $\sum w_n$?
3. On suppose $u_n = \frac{1}{n}$. Nature de $\sum w_n$?

Exercice 5 (IMT PSI 2019)

Justifier la convergence de $\int_0^{+\infty} \left(1 - t \arctan \frac{1}{t} \right) dt$ puis la calculer.

Exercice 6 (CCINP PSI 2025)

On pose $f(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$.

1. Montrer que f est bien définie et \mathcal{C}^1 sur $]0, +\infty[$. Déterminer f' .
2. a) Montrer que $\forall x > 0, f(x) \leq \frac{e^{-x}}{x}$.
b) Montrer que $\forall x > 0, f(x) = -e^{-x} \ln x + \int_x^{+\infty} e^{-t} \ln t dt$.
c) Montrer que f est intégrable sur $]0, +\infty[$.
3. Calculer $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ à l'aide d'une intégration par parties.

Exercice 7 (Mines-Ponts PSI 2025)

Déterminer, pour $P \in \mathbb{R}[X]$, la nature de $\int_0^{+\infty} (-1)^{\lfloor P(x) \rfloor} dx$. (*)

Indications

Exercice 2

2. Commencer par le cas $|a_0| \neq 1$ puis lorsque $a_0 = \pm 1$, considérer $\ln(p_n)$ lorsque c'est possible.

Exercice 4

1. On a un équivalent très simple de S_n .

Exercice 7

Tester $P = X$ et $P = X^2$.