

## Oral TD4 : suites et séries de fonctions

### Exercice 1 (CCINP PSI 2025)

Pour  $n \geq 1$ , on pose  $f_n(x) = \frac{x^2}{x^2 + n^2} + \sin(x)$ .

1. Montrer que  $(f_n)$  converge simplement sur  $\mathbb{R}$  vers une fonction  $f$  à déterminer.
2. À-t-on convergence uniforme sur  $[-a, a]$  pour  $a > 0$ ?
3. À-t-on convergence uniforme sur  $\mathbb{R}$ ?
4. Étudier les modes de convergence de la série de fonctions  $\sum_{n \geq 1} (f_n - f)$ .

### Exercice 2 (CCINP PSI 2025)

Soient  $f(x) = \frac{x}{\operatorname{sh} x}$  et  $f_n(x) = \frac{1}{\operatorname{sh}^2 nx}$

1.  $f$  est-elle prolongeable par continuité en 0. Montrer que  $f$  est bornée sur  $\mathbb{R}$
2. Montrer que  $\sum_{n \geq 1} f_n$  CVS sur  $\mathbb{R}^*$ ; on pose  $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ .
3. Montrer que  $S$  est  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^{+*}$
4. Exprimer  $f_n$  à l'aide de  $f$  et en déduire un équivalent simple de  $S$  en 0
5. Montrer que  $f$  est  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ .

### Exercice 3 (Mines-Télécom PSI 2025)

Soient  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite réelle pour laquelle la série entière  $\sum_{n \geq 1} a_n x^n$  possède un rayon de convergence égal à 1.

1. Montrer que  $\sum_{n \geq 1} a_n \frac{x^n}{1 - x^n}$  est absolument convergente pour  $x \in ]-1, 1[$ .
2. Montrer que  $S : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \frac{x^n}{1 - x^n}$  est continue sur  $] - 1, 1[$ .
3. Montrer que  $S$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $] - 1, 1[$ .

### Exercice 4 (Mines-Ponts PSI 2022)

On donne  $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n^2 x^2}$ .

1. Domaine de définition et continuité de  $f$ .
2. Donner la limite  $\ell$  de  $f(x)$  quand  $x \rightarrow +\infty$  puis un équivalent de  $f(x) - \ell$ . (\*)
3. Donner un équivalent de  $f(x)$  quand  $x \rightarrow 0^+$ .

### Exercice 5 (CCINP PSI 2024)

Soit  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $a_0 = a_1 = 1$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+2} = a_{n+1} + \frac{a_n}{n+2}$

1. Montrer que  $a_n > 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$
2. Étudier la monotonie de  $(a_n)$  et en déduire que  $\sum (a_{n+2} - a_{n+1})$  diverge
3. On pose  $S(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$ . Déterminer le rayon de convergence de cette série entière.
4. Montrer que  $S$  est solution de  $(x-1)y' + (x+1)y = 0$
5. Déterminer la valeur de  $S(x)$  puis de  $a_n$

### Exercice 6 (Mines-Télécom PSI 2025)

Soit  $f(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n + (-1)^n}$

1. Déterminer le domaine de définition de  $f$ . (\*)
2. Montrer que  $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n + (-1)^n} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$
3. Calculer  $f(-1)$ . (\*)
4.  $f$  est-elle continue en  $-1$ ? (\*)

---

## Indications

### Exercice 4

2. Conjecturer l'équivalent en cherchant un équivalent des sommes partielles.

### Exercice 6

1. DL pour l'étude en  $-1$ .
3. On peut partir du DSE de  $\ln(1+x)$ , ou du développement asymptotique de  $H_n$  par ex.
4. Introduire  $g(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n} x^n$  et montrer que  $f - g$  est continue en  $-1$ .