Oral TD5 : intégrales à paramètres

Exercice 1 **(Mines-Télécom PSI 2024)**
Soit $u_n = \displaystyle\int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \cos(x)\,\mathrm{d}x$. Étudier la convergence de la suite (u_n).

Exercice 2 **(Mines-Télécom PSI 2024)**
Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{e^t - 1}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+n^2}$ en montrant la convergence de la série et de l'intégrale. *(*)*

Exercice 3 **(CCINP PSI 2024)**
Soit $b > 0$. On pose : $I(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{x}{t}}}{\sqrt{t}} e^{-bt}\,\mathrm{d}t$ pour $x \geqslant 0$.

1. I est-elle bien définie ? Continue ?

2. Montrer que I est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

3. Montrer que pour $x > 0$: $I(x) = 2\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\frac{x}{u^2}} e^{-bu^2}\,\mathrm{d}u$ et $I'(x) = -2\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{x}{u^2}} e^{-bu^2}}{u^2}\,\mathrm{d}u$.

4. Montrer à l'aide d'un changement de variable judicieux que : $\forall x > 0, I'(x) = -\sqrt{\dfrac{b}{x}} I(x)$.

5. En déduire l'expression de I.

Exercice 4 **(CCINP PSI 2023)**
Soit $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^x(1+t)}$

1. Déterminer le domaine de définition D de f

2. Montrer que f est continue sur D.

3. Pour $x \in D$, vérifier $1 - x \in D$ et prouver que $f(x) = f(1-x)$.

4. Déterminer des équivalents de f aux bornes de D. *(*)*

Exercice 5 **(Centrale PSI 2022)**
Soient $\lambda > -\dfrac{1}{2}$, $\varphi_\lambda(t) = \left(1 - t^2\right)^{\lambda - \frac{1}{2}}$ et $I_\lambda(x) = \displaystyle\int_0^1 \varphi_\lambda(t)\cos(xt)\,\mathrm{d}t$

1. φ_λ est-elle intégrable sur $[0, 1[$?

2. Montrer que I_λ est définie et de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ puis exprimer I''_λ en fonction de $I_{\lambda+1}$ et $I_{\lambda+2}$

3. Montrer que I_λ est développable en série entière.

Exercice 6 **(Mines-Ponts PSI 2023)**
Soit $I = \displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_0^x \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$

1. Montrer que I existe

2. Montrer que $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-xt}}{t} \sin(t)\,\mathrm{d}t$ est définie et continue sur $\mathbb{R}^+$. *(*)*

3. Montrer que f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et en déduire la valeur de I.

Indications

Exercice 2

Utiliser $|\sin t| \leqslant t$ *sur* $\mathbb{R}^+$

Exercice 4

4. *Commencer par une IPP*

Exercice 6

2. *Pour* $\mathcal{C}^0$, *écrire* $f(x) = I - \displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{e^{-xt}}{t} \sin(t)\,\mathrm{d}t$ *et vérifier la CVU de la série de fct, en commençant par poser* $t = n\pi + u$.