Oral TD6 : espaces euclidiens

Exercice 1 **(Mines-Ponts PSI 2025)**
Soient n un entier et $E = \mathbb{R}_n[X]$. Soient $a_0, \dots, a_n$ des réels deux à deux distincts.

1. Montrer que $(P|Q) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} P(a_k)Q(a_k)$ définit un produit scalaire sur E.

2. Soient $\alpha_0, \dots, \alpha_n$ des réels non tous nuls.

a) Déterminer la dimension de $H = \left\{ P \in E, \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \alpha_k P(a_k) = 0 \right\}$.

b) Soit $Q \in E$. Déterminer $d(Q, H)$ la distance de Q à H. *(*)*

Exercice 2 **(CCINP PSI 2024)**
Soit $\phi(A, B) = \displaystyle\int_0^{+\infty} A(t)B(t)e^{-t}\,\mathrm{d}t$ avec $(A, B) \in \mathbb{R}[X]$.

1. Montrer que ϕ défini un produit scalaire qu'on notera $(.|.)$ puis que $(X^k|1) = k!$.

2. On pose Q le projecteur de 1 sur $F = \mathrm{Vect}(X, X^2, ..., X^n)$, montrer qu'il existe $(a_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ tel que $Q = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k X^k$.

3. On pose $P = 1 - \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k \prod_{j=1}^{k} (X + j)$ Calculer $(1 - Q|X^i)$; en déduire $\forall i \in [\![1, n]\!]\,, P(i) = 0$ puis une expression de P.

4. Montrer que $\displaystyle\inf_{(\alpha_1,\dots,\alpha_n)} \int_0^{+\infty} (1 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + ... + \alpha_n t^n)^2 e^{-t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n+1}$.

Exercice 3 **(CCP PSI 2021)**
Soient E un espace euclidien et $u \in \mathcal{O}(E)$.

1. Montrer que $\mathrm{Im}(v)^{\perp} = \ker(v)$ où $v = u - id$.

2. Soit $a \in E$ et $x_n = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u^k(a)$; montrer que la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ converge.

Exercice 4 **(CCP PSI 2024)**
Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $M^T M = M M^T$ et $M^2 + 4I_2 = 0$.

1. Montrer que $M^T M$ est diagonalisable et que ses valeurs propres sont positives ou nulles.

2. Trouver un polynôme de degré 2 annulateur de $M^T M$, en déduire son spectre, puis que $\dfrac{1}{2}M$ est orthogonale.

3. Trouver M.

Exercice 5 **(Mines-Ponts PSI 2022)**
Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des matrices symétriques réelles définies positives de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ non nulle, montrer que $\mathrm{Tr}(AA^T) > 0$

2. Soit $S \in \mathcal{E}$. Montrer qu'il existe $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $S = A^T A$

3. Soit $(S, S') \in \mathcal{E}^2$. Montrer $\mathrm{Tr}(SS') > 0$

Exercice 6 **(Mines-Ponts PSI 2025)**
Soient E un espace euclidien, $u \in \mathcal{S}^{++}(E)$ et $v \in \mathcal{S}^{+}(E)$. On veut montrer que $(\det u)^{1/2}(\det v)^{1/2} \leqslant \det\left(\dfrac{u+v}{2}\right)$. On pose $B(x, y) = (x|u(y))$

1. Montrer que B est un produit scalaire sur E.

2. Montrer qu'il existe un unique $w \in \mathcal{L}(E)$ tel que $(v(x)|y) = B(w(x)|y)$. *(*)*

3. Montrer que w est diagonalisable et $\mathrm{Sp}(w) \subset \mathbb{R}^{+}$. *(*)*

4. Montrer que $\sqrt{\det(w)} \leqslant \det\left(\dfrac{id + w}{2}\right)$ et conclure.

Indications

Exercice 1

2.b *Trouver un vecteur normal à H.*

Exercice 6

2. *Introduire une base orthonormée de E (pour le produit scalaire $(\,|\,)$) et les matrices des applications linéaires.*

3. *Vérifier que w est autoadjoint pour le produit scalaire B.*