Oral TD8 : probabilités

Exercice 1 **(Centrale PSI 2024)**
Un automate allume, à la date n, une diode rouge ou une diode verte. Si à la date n il allume une diode rouge, il allume une diode verte à la date $n+1$ avec une probabilité $p \in]0,1[$; si à la date n il allume une diode verte, il allume une diode rouge à la date $n+1$ avec une probabilité $q \in]0,1[$. On note r_n (resp. v_n) la probabilité que la diode allumée soit rouge (resp. verte) à l'instant n

1. Trouver $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $\begin{pmatrix} v_{n+1} \\ r_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} v_n \\ r_n \end{pmatrix}$, à l'aide de la formule des probabilités totales.

2. Déterminer $B, C \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $\left\{ \begin{array}{r} B + C = I_2 \\ B + (1-p-q)C = A \end{array} \right.$ puis en déduire A^n pour $n \geqslant 1$. *(*)*

3. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} r_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$

Exercice 2 **(CCINP PSI 2024)**
Une urne contient 3 jetons numérotés 1, 2 et 3 que l'on tire avec remise. On note Y le nombre de tirages nécessaires pour obtenir 2 jetons différents et Z celui pour tirer les 3 jetons.

1. Déterminer la loi de Y puis son espérance.

2. Déterminer la loi du couple (Y, Z).

3. Déterminer la loi et l'espérance de Z

Exercice 3 **(Mines-Ponts PSI 2024)**
On considère une urne composée de n boules : une est rouge, b sont blanches, $n-b-1$ sont noires. On note $p = \dfrac{b}{n-1}$.
L'expérience consiste à tirer des boules avec remise et de s'arrêter lorsque la boule rouge est tirée.
On note : T la variable aléatoire comptant le nombre de tirages effectués en incluant celui de la boule rouge et X la variable aléatoire comptant le nombre de boules blanches tirées.

1. Soit $r \in \mathbb{N}$. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n \geqslant r} \binom{n}{r} x^{n-r}$ dont on calculera la somme.

2. Donner la loi de probabilité de T.

3. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, $i \in \mathbb{N}$, calculer $P_{(T=k)}(X = i)$.

4. En déduire la loi de X, calculer son espérance et sa variance. *(*)*

Exercice 4 **(Mines-Télécom PSI 2023)**
Un pion se déplace sur une droite : il se déplace d'un cran vers la droite avec la probabilité $p \in]0,1[$ et vers la gauche avec la probabilité $1-p$. À l'instant initial, il est à l'origine du repère et on note X_n sa position après n déplacements.

1. Que vaut $X_n(\Omega)$? *(*)*

2. On note D_n le nombre de déplacements vers la droite au cours des n premiers instants. Relier X_n à D_n.

3. Déterminer les lois de D_n et X_n.

4. Calculer l'espérance de X_n.

Exercice 5 **(CCINP PSI 2025)**

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 2b \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que A soit diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2. Soit X une variable aléatoire discrète telle que $X \sim \mathcal{G}(p)$. Donner, pour $n \in \mathbb{N}$, la valeur de $P(X > n)$.

3. Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes indépendantes telles que $X \sim \mathcal{G}(p_1)$ et $Y \sim \mathcal{G}(p_2)$. On pose $M = \begin{pmatrix} 0 & X \\ -X & 2Y \end{pmatrix}$. Déterminer la probabilité que M soit diagonalisable.

Exercice 6 **(Centrale PSI 2024)**
On considère une urne contenant N boules numérotées de 1 à N dans laquelle on effectue des tirages avec remise. On note $(T_n = k)$ l'événement « au cours des n tirages on a obtenu exactement k boules distinctes ».

1. Donner $P(T_n = 1)$, $P(T_n = 2)$ et $P(T_n = n)$

2. Établir une relation entre $P(T_{n+1} = k+1)$, $P(T_n = k)$ et $P(T_n = k+1)$

3. En déduire l'espérance de T_n. *(*)*

Indications

Exercice 1

2. *Calculer BC.*

Exercice 3

4. *Reconnaître $1+X$.*

Exercice 4

1. *Distinguer n pair et n impair*

Exercice 6

3. *Utiliser la fonction génératrice.*