

Oral TD9 : calcul différentiel et géométrie

Exercice 1 (CCINP PSI 2025)

Soit $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$

1. Étudier la diagonalisabilité de A .
2. Trouver des matrices D , diagonale, et P , inversible, telles que $A = PDP^{-1}$.
3. On souhaite résoudre le système différentiel suivant (S) :
$$\begin{cases} x' = -2x - 2y \\ y' = 2x + 3y \\ z' = x + 3z \end{cases}$$

On pose $U(t) = P^{-1}X(t)$.

Trouver un système d'équations vérifié par $U(t)$ et effectuer la résolution de ce système.

4. On souhaite maintenant résoudre le système différentiel suivant (S') :
$$\begin{cases} x'' = -2x - 2y \\ y'' = 2x + 3y \\ z'' = x + 3z \end{cases}$$

On pose $V(t) = P^{-1}X(t)$. Trouver un système d'équations vérifié par $V(t)$

5. Montrer que l'ensemble des solutions bornées de (S') est un \mathbb{R} -espace vectoriel.
Quelle est sa dimension ?

Exercice 2 (Mines-Télécom PSI 2024)

Soit (E) l'équation différentielle sur \mathbb{R}^{+*} $x^2y' - y = x^2 - x + 1$. On note F la primitive sur \mathbb{R}^{+*} qui s'annule en 1 de $f : x \mapsto e^{1/x} \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)$

1. Déterminer les solutions de (E)
2. Trouver une solution polynomiale de (E)
3. En déduire F

Exercice 3 (Mines-Ponts PSI 2022)

Soient I un intervalle de \mathbb{R} , α et β deux fonctions réelles dérivables sur I . On définit le wronskien $w : I \rightarrow \mathbb{R}$ de (α, β) par $\forall t \in I, w(t) = \begin{vmatrix} \alpha(t) & \beta(t) \\ \alpha'(t) & \beta'(t) \end{vmatrix}$

1. Montrer que si φ et ψ sont deux solutions de (E) : $y'' = ay' + by$ avec $a, b : I \rightarrow \mathbb{R}$ continues alors le wronskien w de (φ, ψ) vérifie une équation différentielle d'ordre 1.
2. Si φ ne s'annule pas sur I , calculer $\left(\frac{\psi}{\varphi}\right)'$ en fonction de w et φ .
3. Trouver une solution développable en série entière de (E) : $2xy'' + y' - y = 0$ telle que $\varphi(0) = 1$.
4. En déduire les solutions de (E) sur \mathbb{R} .

Exercice 4 (CCINP PSI 2025)

Soit $f(x, y) = \begin{cases} \frac{3xy^3 - x^3y}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

1. Montrer que f est \mathcal{C}^2 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$
2. Montrer que f est \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^2 .
3. Calculer $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$; f est-elle \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R}^2 ?

Exercice 5 (Mines-Ponts PSI 2025)

Soit $f(x, y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{1 + y^{2n}}$

1. Déterminer le domaine de définition D de f et le représenter. (*)
2. Étudier l'existence des dérivées partielles de f . (*)

Exercice 6 (Centrale PSI 2025)

1. Soit $f : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$.
a) Rappeler la définition de « f est bornée sur Ω ».

b) Rappeler la définition de « f admet un maximum sur Ω ».

2. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on pose $s(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$ et $\varphi(z) = |s(z)|^2$.

a) φ est-elle bornée sur \mathbb{C} ?

On pose $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$.

b) Montrer que φ est bornée sur D .

c) Montrer que φ atteint son maximum sur D en exactement deux points. (*)

Exercice 7 (Mines Ponts PSI 2025)

Soit f définie sur \mathbb{R}^2 par $f(x, y) = (1 + 2 \cos^2(\pi x)) (1 - e^{-y^2})$ et la surface représentative de f associée définie par $S = \{(x, y, f(x, y)), (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$.

1. Y a-t-il des points critiques de f sur \mathbb{R}^2 ? Si oui, les caractériser.

2. Déterminer le plan tangent à S au point $(1, 1, f(1, 1))$.

Indications

Exercice 5

1. Distinguer $1 < |y|$, $|y| < 1$ et $|y| = 1$.

2. Ce sont des séries de fonctions par rapport à x quand y est fixé et inversement.

Exercice 6

2.c Introduire une fonction de deux variables en posant $z = x + iy$. Pour « décrire » le bord de D , poser $(x, y) = (\cos \theta, \sin \theta)$.