

Corrigé TD9 : calcul différentiel et géométrie

Exercice 5 (Mines-Ponts PSI 2025)

Soit $f(x, y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{1+y^{2n}}$

1. Déterminer le domaine de définition D de f et le représenter. (*)
2. Étudier l'existence des dérivées partielles de f . (*)

1. On discute sur la valeur de y de façon à trouver un équivalent de $\frac{x^{2n}}{1+y^{2n}}$: on a une SATP :

- Si $|y| > 1$ alors $1+y^{2n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} y^{2n}$ donc $\frac{x^{2n}}{1+y^{2n}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \left|\frac{x}{y}\right|^{2n}$ donc $\sum \frac{x^{2n}}{1+y^{2n}}$ CV si et seulement si $\left|\frac{x}{y}\right| < 1$.
- Si $|y| < 1$ alors $1+y^{2n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 1$ donc $\frac{x^{2n}}{1+y^{2n}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} |x|^{2n}$ donc $\sum \frac{x^{2n}}{1+y^{2n}}$ CV si et seulement si $|x| < 1$.
- Si $|y| = 1$ alors $\frac{x^{2n}}{1+y^{2n}} = \frac{1}{2}|x|^{2n}$ donc $\sum \frac{x^{2n}}{1+y^{2n}}$ CV si et seulement si $|x| < 1$.

En résumé, on a $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, |x| < \max(1, |y|)\}$

2. a) Dérivée par rapport à x : $x \mapsto f(x, y)$ est, pour y fixé, la somme d'une série entière de variable x , de coefficients $a_n = \frac{1}{1+y^{2n}}$ et de rayon de convergence $R_y = \max(1, |y|)$. Ainsi, $x \mapsto f(x, y)$ est de classe \mathcal{C}^∞ sur $] -R_y, R_y[$ et

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2n}{1+y^{2n}} x^{2n-1}$$

- b) Dérivée par rapport à y : $y \mapsto f(x, y)$ est, pour y fixé, la somme d'une série de fonctions. On pose $u_n(y) = \frac{x^{2n}}{1+y^{2n}}$ et on applique le théorème de dérivation des séries de fonctions :

- Si $|x| < 1$ alors $y \in \mathbb{R}$ et on a

H1 : les fonctions u_n sont \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} .

H2 : $\sum u_n$ CVS sur \mathbb{R} .

H3 : $u'_n(y) = \frac{-2ny^{2n-1}x^{2n}}{(1+y^{2n})^2}$ donc $u''_n(y) = \frac{-2nx^{2n}y^{2n-2}[(2n-1) - (2n+1)y^{2n}]}{(1+y^{2n})^3}$ donc

$$\|u'_n\|_\infty = -u'_n\left(\left(\frac{2n-1}{2n+1}\right)^{1/2n}\right) = 2nx^{2n}\left(\frac{2n+1}{2n-1}\right)^{1/2n} \frac{\frac{2n-1}{2n+1}}{\left(1+\frac{2n-1}{2n+1}\right)^2} \sim 2nx^{2n} \times \frac{1}{4} \text{ et comme } |x| < 1,$$

par comparaison, on en déduit $\sum u'_n$ CVN sur \mathbb{R} .

- Si $|x| \geq 1$ alors $y \in]|x|, +\infty[$ (ou $] -\infty, -|x|[$ mais u_n est paire) et on a

H1 : les fonctions u_n sont \mathcal{C}^1 sur $] |x|, +\infty[$.

H2 : $\sum u_n$ CVS sur $] |x|, +\infty[$.

H3 : Si $[a, b] \subset] |x|, +\infty[$ et $y \in [a, b]$ alors $|u'_n(y)| = \frac{2n|y|^{2n-1}x^{2n}}{(1+y^{2n})^2} = \frac{2n}{|y|} \times \frac{y^{2n}}{1+y^{2n}} \times \frac{x^{2n}}{1+y^{2n}} \leq \frac{2n}{a} \times 1 \times$

$$\frac{x^{2n}}{1+a^{2n}} \text{ donc } \|u'_n\|_{\infty, [-a, a]} \leq \frac{2nx^{2n}}{a(1+a^{2n})} \sim \frac{2n}{a} \left|\frac{x}{a}\right|^{2n} \text{ et comme } \left|\frac{x}{a}\right| < 1, \text{ on obtient aussi la CVNTS de }] |x|, +\infty[.$$

Dans les deux cas, la fonction $y \mapsto f(x, y)$ est de classe \mathcal{C}^1 sur son domaine de définition et

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2ny^{2n-1}x^{2n}}{(1+y^{2n})^2}$$