

TD1 : Intégration

Exercice 1

Calculer, pour $x > 0$, les intégrales suivantes en utilisant le changement de variable indiqué :

1. $I(x) = \int_0^x \sqrt{e^t - 1} \, dt$ en posant $u = \sqrt{e^t - 1}$
2. $J(x) = \int_x^{\frac{a}{x}} \frac{\ln(t)}{a + t^2} \, dt$, où $a > 0$, en posant $t = \frac{a}{u}$.

Exercice 2 (Mines-Ponts PSI 2018)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+2k} \sqrt{\frac{k}{2n+k}}$; déterminer la limite de la suite (u_n) . (*)

On donne $\frac{4y^2}{(1-y^2)(1+3y^2)} = \frac{1}{1-y^2} - \frac{1}{1+3y^2}$

Exercice 3 (Mines-Télécom PSI 2018)

Pour $x \in [0, 1]$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n(x) = \int_0^x e^{nt^2} \, dt - \int_x^1 e^{-nt^2} \, dt$.

1. Montrer que f_n est dérivable sur $[0, 1]$ et étudier ses variations.
2. Montrer qu'il existe un unique $c_n \in [0, 1]$ tel que $\int_0^{c_n} e^{nt^2} \, dt = \int_{c_n}^1 e^{-nt^2} \, dt$.
3. Étudier la suite $(c_n)_{n \geq 0}$. (*)

Exercice 4

1. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} \, dx = 0$. (*)
2. Vérifier $\sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \int_0^1 x^{k-1} \, dx = \ln 2 + (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} \, dx$ et en déduire la valeur de $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$.

Exercice 5

1. Montrer que $f(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t}$ est définie sur $]0, 1[$.
2. Montrer que f se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$. (*)
3. Calculer $\int_0^1 \frac{1-t}{\ln t} \, dt$.

Exercice 6 (CCP PSI 2007)

1. Montrer que u défini par $u(f)(x) = \int_0^x \cos(x-t)f(t) \, dt$ est un endomorphisme de $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. (*)
2. Calculer $u(f)(0)$.
3. Trouver les fonctions f telles que $u(f)$ soit constant. (*)
4. Résoudre $u(f) = \lambda f$, pour $\lambda \in \mathbb{R}$. (*)

Indications

Exercice 2

Somme de Riemann puis poser $y = \sqrt{\frac{t}{2+t}}$.

Exercice 3

3. Étudier le signe de $f_{n+1}(x) - f_n(x)$ et en déduire que (c_n) converge vers ℓ . On peut ensuite remarquer que $\int_0^{c_n} e^{nt^2} \, dt \geq c_n$ pour trouver $\ell = 0$.

Exercice 4

1. Majorer l'intégrale.

Exercice 5

2. Pour la limite en 1, soit encadrer $f(x)$, soit introduire un équivalent de $\frac{1}{\ln t}$ en 1.

Exercice 6

1. $\cos(a-b) = \dots$
3. Montrer que $u(f)$ est $\mathcal{C}^1$.
4. si $\lambda \neq 0$ montrer qu'une solution f est nécessairement de classe $\mathcal{C}^1$ puis $\mathcal{C}^2$ et vérifie une équation différentielle.