

I Primitives et intégration sur un segment

Exercice 1 (Centrale PSI 2014) [Solution]

Soit f continue sur $[0, 1]$

1. On suppose que $\int_0^1 f(t) dt = 0$; montrer que f s'annule sur $]0, 1[$.
2. On suppose $\int_0^1 f(t) dt = \frac{1}{2}$; montrer que f admet un point fixe.

Exercice 2 (Mines-Ponts PSI 2024) [Solution]

Soit E l'ensemble des applications de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$, 1-lipschitziennes et telles que $u(0) = 0$.

Déterminer $\sup_{u \in E} \int_0^1 ((u(t) - u(t)^2) dt$

indication : commencer par prouver $u([0, 1]) \subset [-1, 1]$ et étudier $x \mapsto x - x^2$ sur $[-1, 1]$.

Exercice 3 (Mines-Ponts PSI 2018) [Solution]

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+2k} \sqrt{\frac{k}{2n+k}}$; déterminer la limite de la suite (u_n) .

On donne $\frac{4y^2}{(1-y^2)(1+3y^2)} = \frac{1}{1-y^2} - \frac{1}{1+3y^2}$

indication : c'est une somme de Riemann

Exercice 4 (Mines-Télécom PSI 2018) [Solution]

Pour $x \in [0, 1]$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n(x) = \int_0^x e^{nt^2} dt - \int_x^1 e^{-nt^2} dt$.

1. Montrer que f_n est dérivable sur $[0, 1]$ et étudier ses variations.
2. Montrer qu'il existe un unique $c_n \in [0, 1]$ tel que $\int_0^{c_n} e^{nt^2} dt = \int_{c_n}^1 e^{-nt^2} dt$.

Déterminer c_0 .

3. Étudier la suite $(c_n)_{n \geq 0}$.

indication : étudier le signe de $f_{n+1}(x) - f_n(x)$ et en déduire que (c_n) converge vers l . On peut ensuite remarquer que $\int_0^{c_n} e^{nt^2} dt \geq c_n$ pour trouver $l = 0$.

Exercice 5 (ENSAM PT 2007) [Solution]

Montrer que $f : x \mapsto \int_x^{2x} \frac{dt}{t - \ln t}$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$; donner les variations de f .

Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{2x} \left(\frac{1}{t - \ln t} - \frac{1}{t} \right) dt = 0$, en déduire que f admet une limite finie en $+\infty$ que l'on précisera.

Montrer que f est prolongeable par continuité en 0 et dérivable à droite en 0. Donner l'allure du graphe de f .

Exercice 6 (Mines-ponts PC 2006) [Solution]

Montrer que $f(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t}$ est définie sur $]0, 1[$. Donner ses limites en 0 et 1. Calculer $\int_0^1 \frac{1-t}{\ln t} dt$.

questions subsidiaires : étudier f sur $\mathbb{R}^+$ (limite en $+\infty$, variations, DL₃(1))

Exercice 7 (CCP PC 2014) [Solution]

Définition, parité, variations et limites de $f(x) = \int_x^{2x} \frac{\text{ch } t}{t} dt$; pour les limites, commencer par justifier que $\exists \alpha > 0, \forall t \in]0, \alpha[, \left| \frac{\text{ch } t - 1}{t} \right| \leq t$.

Exercice 8 (Centrale PC 2014) [Solution]

Montrer que $t \mapsto \frac{1}{t^2} - \frac{1}{(\arctan t)^2}$ est intégrable sur $]0, 1[$.

En déduire un équivalent de $\int_x^1 \frac{dt}{(\arctan t)^2}$ quand x tend vers 0^+ .

Exercice 9 (CCP PSI 2015) [Solution]

On pose $\phi(x) = \int_{1/x}^x e^{-t^2} dt$.

1. Montrer que ϕ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ et calculer $\phi'(x)$.
2. Étudier la parité de ϕ et son signe sur $\mathbb{R}^{+*}$.
3. Montrer que ϕ admet une limite en $+\infty$.
4. Montrer que ϕ n'est pas prolongeable par continuité en 0.

Exercice 10 (Mines-Ponts PSI 2015) [Solution]

Soit $f(x) = \int_1^x \frac{e^t}{t} dt$.

1. Trouver un équivalent simple de f en 0.
2. Trouver un équivalent de $f - g$ en 0, où g est la fonction trouvée précédemment.

Exercice 11 (Mines-Ponts PSI 2022) [Solution]

Soit $f(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$.

1. Montrer que f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et préciser f' .
2. Déterminer des équivalents de f en 0 et $+\infty$.
3. Justifier la convergence de $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ et calculer cette intégrale.

Exercice 12 (CCINP PSI 2025) [Solution]

On pose $f(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$.

1. Montrer que f est bien définie et $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$. Déterminer f' .
2. a) Montrer que $\forall x > 0, f(x) \leq \frac{e^{-x}}{x}$.
b) Montrer que $\forall x > 0, f(x) = -e^{-x} \ln x + \int_x^{+\infty} e^{-t} \ln t dt$.
c) Montrer que f est intégrable sur $]0, +\infty[$.
3. Calculer $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ à l'aide d'une intégration par parties.

Exercice 13 (Centrale PSI 2010) [Solution]

1. Montrer que $f(x) = \int_x^{+\infty} \frac{dt}{t(e^{\sqrt{t}} - 1)}$ est définie pour $x > 0$.
2. Montrer que $f(x) \sim_0 \frac{2}{\sqrt{x}}$.
3. Montrer que $f(x) = 2 \int_{\sqrt{x}}^{+\infty} \frac{ds}{s(e^s - 1)}$ puis que $f(x) \sim_{+\infty} 2 \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$.
4. Montrer que $\int_0^{+\infty} f(t) dt = - \int_0^{+\infty} t f'(t) dt$

Exercice 14 (Mines-Télécom PSI 2018) [Solution]

On pose $f(x) = \int_0^{+\infty} \min\left(x, \frac{1}{\sqrt{t}}, \frac{1}{t^2}\right) dt$.

1. Étudier l'existence de $f(x)$ et calculer $f(x)$.
indication : découper l'intégrale en 3 avec la relation de Chasles selon la valeur du minimum, en discutant suivant la valeur de x
2. Étudier la continuité et la dérivabilité de f .

Exercice 15 (Mines-Télécom PSI 2023) [Solution]

Pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, on considère la propriété $(*) : \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{1}{n}(f(x+n) - f(x))$

1. Soit f vérifiant $(*)$
a) En utilisant différentes valeurs de n , montrer que $f'(x) = f'(x+1)$

b) Montrer que $x \mapsto \int_x^{x+1} f'(t) dt$ ne dépend pas de x puis que f' est constante

2. Trouver les fonctions qui vérifient (*)

Exercice 16 (Centrale PSI 2024) [Solution]

Soient $E = \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et W_h l'ensemble des fonctions f de E , bornées, telles que $\forall x \in \mathbb{R}, \int_{x+h}^{x+2h} f(t) dt = 2 \int_x^{x+h} f(t) dt$

1. Montrer que W_h est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel

2. a) Soit $f_n : t \mapsto \cos\left(\frac{2n\pi}{h}t\right)$; montrer que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une famille libre d'éléments de W_h .

Que peut-on en déduire sur la dimension de W_h ?

indication : dériver la relation vérifiée par f

b) Soit T_h définie par $\forall x \in \mathbb{R}, T_h(f) : x \mapsto f(x+h)$. Montrer que $W_h \subset \ker(T_h^2 - 3T_h + 2id_E)$ puis que $\ker(T_h^2 - 3T_h + 2id_E) = \ker(T_h - id_E) \oplus \ker(T_h - 2id_E)$

c) En déduire que f est périodique.

3. Déterminer W_h

II Endomorphismes et équations fonctionnelles

Exercice 17 [Solution]

Soit $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$. On pose, pour $f \in E$, $\|f\|_\infty = \sup_{t \in [0, 1]} |f(t)|$ et $\varphi(f)(x) = \int_0^x f(t) dt$.

1. Montrer que φ est un endomorphisme de E tel que $\|\varphi(f)\|_\infty \leq \|f\|_\infty$.

2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer $\varphi^n(f)$ à l'aide d'une intégrale de f et en déduire une majoration de $\|\varphi^n(f)\|_\infty$ en fonction de $\|f\|_\infty$.

indication : justifier que $\varphi^n(f)$ est de classe $\mathcal{C}^n$ et calculer $(\varphi^n(f))^{(k)}(0)$, pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

Exercice 18 (CCP PSI 2007) [Solution]

Montrer que u défini par $u(f)(x) = \int_0^x \cos(x-t)f(t) dt$ est un endomorphisme de $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Calculer $u(f)(0)$. Trouver les fonctions f telles que $u(f)$ soit constant.

question subsidiaire : résoudre $u(f) = \lambda f$.

Exercice 19 (ENSAM PSI 2015) [Solution]

On note $E = \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$. Pour $f \in E$, on pose $T(f)(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt & \text{si } x > 0 \\ f(0) & \text{si } x = 0 \end{cases}$

1. Montrer que T est un endomorphisme de E .

2. Est-il injectif? surjectif?

3. Résoudre $T(f) = \lambda f$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

Exercice 20 (ENTPE-EIVP PSI 2015) [Solution]

Soient g continue sur $[0, 1]$ et $G(x) = \frac{1}{2} \int_0^1 |x-t|g(t) dt$.

1. Montrer que G est $\mathcal{C}^2$ sur $[0, 1]$ et calculer G'' .

2. Montrer qu'il existe a et b tels que $f : x \mapsto G(x) + ax + b$ vérifie $f'' = g$ et $f(0) = f(1) = 0$.

3. Existe-t-il d'autres solutions?

Exercice 21 (Centrale PSI 2018) [Solution]

Soit $E = \{g \in \mathcal{C}^2([0, 1], \mathbb{C}), f(0) = f(1) = 0\}$ et $F = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{C})$.

1. Montrer que ϕ , qui à f associe f'' est un isomorphisme de E sur F .

2. Montrer que $G(x) = \frac{1}{2} \int_0^1 |x-t|g(t) dt$, avec $g \in F$, est $\mathcal{C}^2$ sur $[0, 1]$ et calculer G'' .

3. Montrer qu'il existe $k : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{C}$ telle que $\phi^{-1}(g)(x) = \int_0^1 k(x, t)g(t) dt$ et en déduire une constante $C > 0$ telle que $\forall g \in F, \sup_{[0, 1]} |\phi^{-1}(g)| \leq C \sup_{[0, 1]} |g|$.

Exercice 22 (Centrale PC 2014) [Solution]

Trouver l'unique fonction f , de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ telle que $f(0) = 2$ et $f'(x) + 5 \int_0^x f(t) \cos(x-t) dt = 10$.

Exercice 23 (Mines-Ponts PSI 2019) [Solution]

Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+)$ telle que $\forall x \geq 0, x^2 f(x) = 2 \int_0^x t f(x-t) dt$.

1. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et en déduire $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{+*})$
indication : changement de variable
2. Montrer que f vérifie, sur $\mathbb{R}^{+*}$, une équation différentielle d'ordre 2
3. Trouver f

Exercice 24 (CCP PC 2006) [Solution]

Pour $f \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$, on pose $\phi(f)(x) = \int_0^1 \inf(x, t) f(t) dt$. En utilisant la relation de Chasles, trouver une autre forme de $\phi(f)(x)$. Prouver que ϕ est un endomorphisme de $\mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$. Trouver $\ker \phi$ et $\text{Im } \phi$. Prouver que $\phi(f)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ et vérifie une équation différentielle de la forme $(\phi(f))'' = af$ avec $a < 0$.

Exercice 25 (Centrale PSI 2015) [Solution]

Soit a continue et intégrable sur $\mathbb{R}^+$. On note f une solution sur $\mathbb{R}^+$ de $(E) : y'' + (1+a)y = 0$ et g définie par $g(x) = f(x) + \int_0^x \sin(x-t)a(t)f(t) dt$.

1. A-t-on $\lim_{+\infty} a = 0$?
2. Montrer que $g + g'' = 0$.
3. Montrer qu'il existe $c > 0$ tel que $|f(x)| \leq c + \int_0^x |a(t)f(t)| dt$.
4. En déduire que les solutions de (E) sur $\mathbb{R}^+$ sont bornées.

Exercice 26 (Centrale PSI 2019) [Solution]

Soit $(E) : y'' + \varphi(t)y = 0$ où φ est continue sur $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles.

1. Résoudre (E) dans le cas où φ est constante.
2. Soient f et g continues sur $[a, +\infty[$, g positive, telle que $\forall t \in [a, +\infty[, f(t) \leq M + \int_a^t f(u)g(u) du$.

On pose $F(t) = M + \int_a^t f(u)g(u) du$ et $G(t) = \exp\left(\int_a^t g(u) du\right)$.

En calculant la dérivée de $\frac{F}{G}$, montrer que $\forall t \in [a, +\infty[, f(t) \leq M \exp\left(\int_a^t g(u) du\right)$.

3. On suppose que $t \mapsto t\varphi(t)$ est intégrable sur $[a, +\infty[$.
 - a) Soit y une solution de (E) . Justifier qu'il existe une fonction affine A telle que $y(t) = A(t) - \int_a^t (t-u)y(u)\varphi(u) du$.
indication : poser $z(t) = - \int_a^t (t-u)y(u)\varphi(u) du$ et calculer z'' .
 - b) En déduire que $t \mapsto \frac{y(t)}{t}$ est bornée sur $[a, +\infty[$ avec $a > 0$

III Intégrabilité et convergence d'intégrales

Exercice 27 [Solution]

Déterminer la nature des intégrales suivantes, avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$: $\int_0^1 \frac{\ln(1-t^2)}{(1+t)^2} dt$

$$\int_0^1 \frac{\text{sh}(\sqrt{t}) \ln t}{\sqrt{t} - \sin t} dt \quad ; \quad \int_1^{+\infty} \frac{\ln(t^2-t)}{(1+t)^2} dt \quad ; \quad \int_0^{+\infty} t^\alpha e^{-t^\beta} dt \quad ; \quad \int_1^{+\infty} \frac{(\ln t)^\alpha}{t^\beta - 1} dt \quad ; \quad \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t} - \sin t} dt$$

indication : pour la dernière, à l'aide d'une IPP, prouver qu'elle a la même nature que $\int_1^{+\infty} \frac{\cos^2 t}{t} dt$.

Exercice 28 (CCP PSI 2010) [Solution]

Limite en 0 de $tf(t)$ où $f(t) = \exp\left(\frac{1}{\sqrt{t}} + \ln t \frac{\sin t}{t}\right)$. f est-elle intégrable sur $]0, 1]$?

Exercice 29 (Mines-Télécom PSI 2019) [Solution]

Étudier la convergence de $\int_0^{+\infty} e^{-t} \left(\frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t} \right) dt$

Exercice 30 (Mines-Ponts PSI 2018) [Solution]

Étudier en fonction de $\alpha > 0$, la convergence de $\int_0^{+\infty} (e^{\sin^2 t/t^\alpha} - 1) dt$

Exercice 31 (CCP PSI 2010) [Solution]

Étudier l'intégrabilité sur $]0, 1]$ de $x \mapsto |\ln x|^\alpha$.

Exercice 32 (CCP PSI 2018) [Solution]

Déterminer la nature des deux intégrales suivantes : $\int_1^{+\infty} \frac{e^{\sin t}}{t} dt$ et $\int_0^{+\infty} \sin(t) \sin\left(\frac{1}{t}\right) dt$.

Exercice 33 (Telecom SudParis PSI 2014) [Solution]

Vérifier que $\int_0^{+\infty} \frac{\ln x - \ln(1 - e^{-x})}{x} e^{-\alpha x} dx$ existe pour tout $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$.

Exercice 34 (ICNA PSI 2019) [Solution]

1. Pour quelle(s) valeur(s) de a et b , $\int_0^{+\infty} (\sqrt{t} + a\sqrt{t+1} + b\sqrt{t+2}) dt$ converge-t-elle ?
2. Calculer cette intégrale quand elle converge.

Exercice 35 (Mines-Ponts PSI 2023) [Solution]

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue et T -périodique. Montrer qu'il existe un unique réel λ pour lequel l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{f(t) - \lambda}{t} dt$ est convergente

1. dans le cas où $f = \sin$
2. dans le cas général
indication : IPP en introduisant F une primitive de f et trouver λ tel que $F(t) - \lambda t = O(1)$

Exercice 36 (Mines-Ponts PSI 2025) [Solution]

Déterminer, pour $P \in \mathbb{R}[X]$, la nature de $\int_0^{+\infty} (-1)^{\lfloor P(x) \rfloor} dx$.

Exercice 37 (Centrale PSI 2024) [Solution]

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^3)^n}$

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n)$ et $v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n+1)$. Montrer que (u_n) et (v_n) convergent vers une même limite $\gamma \in \mathbb{R}$
2. Justifier, pour $n \geq 1$, la convergence de I_n et montrer que $\frac{I_{n+1}}{I_n} = 1 - \frac{1}{3n}$
3. Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que $I_n \sim \frac{C}{n^{1/3}}$
indication : considérer $\ln(I_{n+1}) - \ln(I_n)$

Exercice 38 (Mines-Télécom PSI 2023) [Solution]

1. Trouver un équivalent en $+\infty$ de $\frac{1}{t} - \arctan\left(\frac{1}{t}\right)$.
2. Calculer $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t} - \arctan\left(\frac{1}{t}\right) dt$.

Exercice 39 (CCP PSI 2018) [Solution]

1. Trouver $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tels que $\frac{1+X+X^2}{X(X+1)^2} = \frac{a}{X} + \frac{b}{X+1} + \frac{c}{(X+1)^2}$
2. Justifier l'existence de $I = \int_0^1 t \left\lfloor \frac{1}{t} \right\rfloor dt$.
3. Calculer I , sachant que $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Exercice 40 (CCINP PSI 2024) [Solution]

On pose $I_{n,p} = \int_0^1 x^p (\ln x)^n dx$ avec $n, p \in \mathbb{N}$.

1. Étudier l'existence de cette intégrale.

2. Déterminer une relation de récurrence sur n (par intégration par parties) et en déduire la valeur de $I_{n,p}$

Exercice 41 (CCP PC 2010) [Solution]

Convergence et calcul de $\int_0^{+\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{t^2} \right) dt$.

Exercice 42 (IMT PSI 2019) [Solution]

Justifier la convergence de $\int_0^{+\infty} \left(1 - t \arctan \frac{1}{t} \right) dt$ puis la calculer à l'aide du calcul de $\int_0^x t \arctan \frac{1}{t} dt$.

Exercice 43 (Mines-Ponts PSI 2019) [Solution]

Calculer $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+ixy)}$ pour $y \in \mathbb{R}$.

Exercice 44 (AADN MP 2010) [Solution]

Nature de $\int_0^{+\infty} (1 - \operatorname{th}^\alpha x) dx$? ($\alpha \in \mathbb{R}$)

Exercice 45 (Centrale PSI 2010) [Solution]

$\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} \ln \frac{1+x}{1-x} dx$ est-elle convergente ?

Exercice 46 (Mines-Ponts PC 2014) [Solution]

Soient f continue et intégrable sur $\mathbb{R}^+$ et $a > 0$. Montrer que $\int_0^{+\infty} f \left(\left| x - \frac{a}{x} \right| \right) dx$ existe.

Exercice 47 [Solution]

Etudier $\sum \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{dt}{1+t^2|\cos t|}$ puis étudier l'intégrabilité sur $\mathbb{R}^+$ de $t \mapsto \frac{1}{1+t^2|\cos t|}$.

indication commencer par montrer que $\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{dt}{1+t^2|\cos t|} \leq \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{1+n^2\pi^2|\sin t|}$.

Exercice 48 (Mines-Télécom PSI 2022) [Solution]

1. Montrer que $\int_0^\pi \frac{dx}{1+a^2 \sin^2 x} = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+a^2 \sin^2 x}$ et calculer cette intégrale (poser $u = \tan x$).

2. Montrer que la série de terme général $u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{dx}{1+x^3 \sin^2 x}$ converge.

3. $x \mapsto \frac{1}{1+x^3 \sin^2 x}$ est-elle intégrable sur $\mathbb{R}^+$?

Exercice 49 [Solution]

En étudiant $\sum \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{t}{1+t^6 \sin^2 t} dt$, montrer que la fonction $t \mapsto \frac{t}{1+t^6 \sin^2 t}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 50 (CCINP PSI 2023) [Solution]

1. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \int_a^b f(x) \sin nx \, dx$. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$.

indication : IPP

2. Soit $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$.

a) Montrer que I converge.

b) Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $K_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin nx}{x} dx$. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} K_n = I$.

c) On introduit $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin nx}{\sin x} dx$. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (J_n - K_n) = 0$.

d) Montrer que, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $J_{2p+1} = J_{2p-1}$.

indication : $\sin(p) - \sin(q) = ?$

e) En déduire la valeur de I .

Exercice 51 (Mines-Ponts PSI 2018) [Solution]

Soient $u_n = \int_0^{1/2} \frac{\sin^2(\pi nx)}{\tan(\pi x)} dx$ et $v_n = \int_0^{1/2} \frac{\sin^2(\pi nx)}{\pi x} dx$.

1. Montrer que $\int_1^{+\infty} \frac{\cos u}{u} du$ converge.

2. Montrer que $v_n \sim \frac{\ln n}{2\pi}$.

indication : $u = \pi nx$ puis $\sin^2 u = \frac{1}{2}(1 - \cos(2u))$ et couper en 1.

3. Montrer que $\varphi : x \mapsto \frac{1}{\tan(\pi x)} - \frac{1}{\pi x}$ se prolonge en une fonction de $\mathcal{C}^1$ sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ et en déduire un équivalent de u_n .

indication : IPP et utiliser φ' bornée sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$

Exercice 52 (CCINP PSI 2023) [Solution]

1. Justifier la convergence de $I = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin t) dt$

2. Soit $J = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin t \cos t) dt$; montrer $J = 2I$

3. Calculer I

Exercice 53 (CCP PSI 2018) [Solution]

1. Montrer que $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^3 t}{t^2} dt$ existe.

2. Montrer que $I = \frac{3}{4} \lim_{x \rightarrow 0} \int_x^{3x} \frac{\sin t}{t^2} dt$.

indication : commencer par $I = \lim_{x \rightarrow 0} \int_x^{+\infty} \frac{\sin^3 t}{t^2} dt$ et linéariser $\sin^3 t$

3. Déterminer la valeur de I .

indication : introduire $\int_x^{3x} \frac{dt}{t}$

Exercice 54 (CCP PSI 2015) [Solution]

Soit $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^5 x}{x^2} dx$.

1. Justifier l'existence de I .

2. Linéariser $\sin^5 x$.

En déduire deux constantes a et b telles que $\int_A^{+\infty} \frac{\sin^5 x}{x^2} dx = a \int_A^{5A} \frac{\sin x}{x^2} dx + b \int_A^{3A} \frac{\sin x}{x^2} dx$ pour tout $A > 0$.

3. Montrer qu'il existe $M > 0$ tel que $\forall 0 < \alpha < \beta, \left| \int_\alpha^\beta \frac{\sin t - t}{t^2} dt \right| \leq M(\beta - \alpha)$.

4. Calculer I .

Exercice 55 (Centrale PSI 2018) [Solution]

1. Justifier l'existence de $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t} dt$

2. Soit $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{R}^{+*})^2$; montrer l'existence et calculer la valeur de $I_{\alpha, \beta} = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(\alpha t) - \cos(\beta t)}{t} dt$

Exercice 56 (Mines-Ponts PSI 2015) [Solution]

On pose $I_n = \int_0^\pi \ln\left(2 \sin \frac{x}{2}\right) \cos(nx) dx$ et $J_n = \int_0^\pi \sin(nx) \frac{\cos(x/2)}{\sin(x/2)} dx$.

1. Montrer que I_n et J_n existent pour $n \in \mathbb{N}$.

2. Trouver une relation entre I_n et J_n , pour $n \in \mathbb{N}^*$.

3. Trouver une relation entre J_n et J_{n+1} .

4. Calculer I_0 ; on montrera que $\int_0^{\pi/2} \ln(\cos t) dt = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin t) dt$.

5. Calculer I_n .

Exercice 57 [Solution]

Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 dt$

Exercice 58 (CCP PSI 2013) [Solution]

Pour $t > 0$, on pose $f(t) = \frac{1}{t + \cos(t)}$ et, pour $x > 0$, $g(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt$.

1. Montrer que g est prolongeable par continuité en 0.
2. Montrer que, pour $x > 0$, $\int_0^x g(t)^2 dt = 2 \int_0^x f(t)g(t) dt - xg(x)^2$.
3. En déduire que g^2 est intégrable sur $\mathbb{R}^+$. *indication : commencer par vérifier que f^2 est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.*

Exercice 59 (Centrale PSI 2014) [Solution]

Soient $\alpha > -1$ et f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$, décroissante, telle que $t \mapsto t^\alpha f(t)$ est intégrable sur $[1, +\infty[$.

Montrer que $t \mapsto t^{\alpha+1} f'(t)$ et $t \mapsto t^\alpha f(t)$ sont intégrables sur $\mathbb{R}^{+*}$ et que $\int_0^{+\infty} t^{\alpha+1} f'(t) dt = -(\alpha+1) \int_0^{+\infty} t^\alpha f(t) dt$

Exercice 60 (Mines-Ponts PC 2014) [Solution]

Soit f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1, +\infty[$ telle que f' soit de carré intégrable sur $[1, +\infty[$. Montrer que $t \mapsto \frac{f(t)}{t}$ est de carré intégrable sur $[1, +\infty[$.

indication : commencer par calculer la dérivée de $t \mapsto \frac{f(t)}{\sqrt{t}}$ en fonction de $f'(t)$ et de $\frac{f(t)}{t}$.

IV Autres

Exercice 61 (Mines-Ponts PSI 2023) [Solution]

On pose $I_n = \int_0^{+\infty} x^n e^{\omega x} dx$ avec $\omega = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

1. Justifier l'existence de I_n , la calculer et en déduire une fonction $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$, non nulle, telle que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\int_0^{+\infty} t^k f(t) dt = 0$.
indication : utiliser $\omega^3 = 1$ et prendre la partie imaginaire d'une intégrale complexe.

2. Soit $f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$ telle que $\forall k \in \mathbb{N}$, $\int_a^b t^k f(t) dt = 0$. Montrer que $f = 0$; on pourra admettre $\forall \varepsilon > 0, \exists P \in \mathbb{R}[X], \forall x \in [a, b], |f(x) - P(x)| \leq \varepsilon$.

indication : calculer $\int_a^b f(t)P(t) dt$ puis $\int_a^b f(t)^2 dt$

Exercice 62 (ENTPE PSI 2015) [Solution]

Soit f continue sur $\mathbb{R}$ qui tend vers 0 en $\pm\infty$. Justifier la convergence et calculer $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x+1) - f(x-1) dx$.

Exercice 63 (Mines-Ponts PSI 2014) [Solution]

Déterminer le domaine de définition puis la limite en $+\infty$ de $f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} e^{-xt} dt$.

Exercice 64 (Mines-Ponts PSI 2022) [Solution]

Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$ et $\ell \in \mathbb{R}^{+*}$. On suppose que $f(x) \times \int_0^x f^2(t) dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \ell$.

1. Si f admet une limite en $+\infty$, que vaut-elle?
2. Donner un exemple de f vérifiant la condition de l'énoncé?
indication : on peut en trouver un sous la forme $f(t) = (1+t)^\alpha$.

3. Déterminer un équivalent de $f(x)$ en $+\infty$.

indication : poser $g(x) = \int_0^x f^2(t) dt$ et traduire l'hypothèse avec la fonction g exclusivement; montrer que si h est une fonction $\mathcal{C}^1$ telle que $\lim_{+\infty} h'(x) = 0$ alors $\lim_{+\infty} \frac{1}{x} h(x) = 0$ en utilisant la ε -définition de limite.

Exercice 65 (Centrale PSI 2011) [Solution]

1. Montrer que $g : x \mapsto \sqrt{x^2 - 1}$ est une bijection $\mathcal{C}^1$ de $]1, +\infty[$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

2. Calculer $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$ après avoir justifié son existence.

3. Pour $m \in \mathbb{N}^*$, justifier l'existence de $S_m = \sum_{n=m+1}^{+\infty} \frac{m}{n\sqrt{n^2-m^2}}$ puis calculer la limite quand m tend vers $+\infty$.
indication : ça fait un peu penser à une somme de Riemann... sans en être vraiment une.

Solutions

Exercice 1 [sujet] 1. Si f ne s'annule pas sur $]0, 1[$, par continuité, elle garde un signe fixe ; si $f \geq 0$ sur $[a, b]$, et si $\int_a^b f(t) dt = 0$ alors, par continuité, on a $f = 0$; absurde !

2. Appliquer la première question à $x \mapsto f(x) - x$.

Exercice 2 [sujet] on a $|u(t)| = |u(t) - u(0)| \leq |t| \leq 1$ donc $u(t) \in [-1, 1] \subset [-1, 1]$ puis, $x \mapsto x - x^2$ est croissante sur $[-1, \frac{1}{2}]$ et décroissante sur $[\frac{1}{2}, 1]$ donc $u(t) - u(t)^2 \leq \begin{cases} t - t^2 & \text{si } t \leq \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \text{si } t \geq \frac{1}{2} \end{cases}$. On en déduit $\int_0^1 (u - u^2) \leq \int_0^{\frac{1}{2}} (t - t^2) dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{4} dt = \frac{1}{8} - \frac{1}{24} + \frac{1}{8} = \frac{5}{24}$. Si $u(t) = \begin{cases} t & \text{si } t \leq \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \text{si } t \geq \frac{1}{2} \end{cases}$, on a $u \in E$ et $\int_0^1 (u - u^2) = \frac{5}{24}$ donc $\max_{u \in E} \int_0^1 (u - u^2) = \frac{5}{24}$

Exercice 3 [sujet] $u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + 2k/n} \sqrt{\frac{k/n}{2 + k/n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f(t) dt$ car $f : t \mapsto \frac{1}{1 + 2t} \sqrt{\frac{t}{2 + t}}$ est continue sur $[0, 1]$.
 $\int_0^1 f(t) dt \stackrel{u = \sqrt{\frac{t}{2+t}}}{=} \int_0^{1/\sqrt{3}} \frac{4u^2}{(1 + 3u^2)(1 - u^2)} du = \left[\frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+u}{1-u} \right) - \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan(u\sqrt{3}) \right]_0^{1/\sqrt{3}} = \dots$

Exercice 4 [sujet] 1. $t \mapsto e^{nt^2}$ et $t \mapsto e^{-nt^2}$ sont continue sur $[0, 1]$ donc $f'_n(x) = e^{nx^2} + e^{-nx^2} > 0$

2. $f_n(0) < 0$ et $f_n(1) > 0$ donc f_n s'annule une seule fois. $f_0(x) = x - (1 - x)$ donc $c_0 = \frac{1}{2}$.

3. $f_{n+1}(x) - f_n(x) = \int_0^x (e^{(n+1)t^2} - e^{nt^2}) dt - \int_x^1 (e^{-(n+1)t^2} - e^{-nt^2}) dt \geq 0$ donc $f_{n+1}(c_n) \geq 0$ et $c_{n+1} \leq c_n$. La suite (c_n) décroît donc CV vers l . On a $l \leq c_n \leq \int_0^{c_n} e^{nt^2} dt = \int_{c_n}^1 e^{-nt^2} dt \leq (1 - c_n)e^{-nc_n^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ si $l \neq 0$ ce qui est absurde donc $l = 0$

Exercice 5 [sujet] 1. $g : t \mapsto \frac{1}{t - \ln t}$ est continue sur $[x, 2x]$ pour tout $x > 0$ (étudier une fonction pour vérifier que le dénominateur ne s'annule pas) donc $f(x)$ existe. Par Chasles, on a $f(x) = \int_1^{2x} g(t) dt - \int_1^x g(t) dt$; comme g est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$, f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $f'(x) = 2g(2x) - g(x) = \frac{\ln 2 - \ln x}{> 0}$.

2. $\int_x^{2x} g(t) - \frac{1}{t} dt = \int_x^{2x} \frac{\ln t}{t(t - \ln t)} dt$ donc, pour $x > 1$, $0 \leq \int_x^{2x} g(t) - \frac{1}{t} dt \leq \frac{\ln(2x)}{x(x - \ln x)}(2x - x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$; on a donc $f(x) \underset{+\infty}{=} \int_x^{2x} \frac{dt}{t} + o(1) = \ln 2 + o(1)$

3. $\lim_0 g = 0$ donc g est prolongeable par continuité en 0 et f devient $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 6 [sujet] 1. $g : t \mapsto \frac{1}{\ln t}$ est continue sur $\mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ (prolongée par 0 en 0) ; si $x \in [0, 1[$ alors $[x^2, x] \subset [0, 1[$ et si $x > 1$ alors $[x, x^2] \subset]1, +\infty[$. On en déduit que f est définie et même $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$; comme $f(x) = \int_0^{x^2} g(t) dt - \int_0^x g(t) dt$, on a (sur $[0, 1[$) $f'(x) = 2xg(x^2) - g(x) = \frac{x-1}{\ln x}$ (de même sur $]1, +\infty[$ en coupant en 2 par exemple). Pour la limite en 1, même idée que dans l'exercice précédent : $g(t) - \frac{1}{t-1} \xrightarrow{t \rightarrow 1} \frac{1}{2}$ (DL) donc $\int_x^{x^2} g(t) - \frac{1}{t-1} dt \xrightarrow{x \rightarrow 1} 0$ (cette fonction est en fait $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$) ; on en déduit $f(x) \underset{1}{=} \int_x^{x^2} \frac{dt}{t-1} + o(1) = \ln 2 + o(1)$. Comme f est $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$ ($\lim_0 f' = \lim_1 f' = 0$), on a $\int_0^1 f'(t) dt = f(1) - f(0) = \ln 2$.

2. En 1 : $f'(1+u) \underset{u \rightarrow 0}{=} \frac{1}{1 - \frac{1}{2}u + \frac{1}{3}u^2 + o(u^2)} = 1 + \frac{1}{2}u - \frac{1}{12}u^2 + o(u^2)$ donc $f(1+u) \underset{u \rightarrow 0}{=} f(1) + u + \frac{1}{4}u^2 - \frac{1}{36}u^3 + o(u^3)$.
 En $+\infty$: $f(x) \geq \frac{1}{\ln(x^2)}(x^2 - x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$

Exercice 7 [sujet] $g : t \mapsto \frac{\text{ch } t}{t}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$; si $x > 0$, $[x, 2x] \subset \mathbb{R}^{+*}$ et si $x < 0$, $[2x, x] \subset \mathbb{R}^{-*}$ donc f est définie sur $\mathbb{R}^*$. En posant $u = -t$, on prouve que f est paire. Comme, pour $x > 0$, $f(x) = \int_1^{2x} g(t) dt - \int_1^x g(t) dt$, f est $\mathcal{C}^1$ sur

$$\mathbb{R}^{+*} \text{ et } f'(x) = 2g(2x) - g(x) = \frac{\text{ch}(2x) - \text{ch}(x)}{x}.$$

$$\text{En } 0 : \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\text{ch } t - 1}{t^2} = \frac{1}{2} \text{ d'où l'existence de } \alpha ; \text{ pour } 0 < x \leq \frac{\alpha}{2}, \text{ on a } 0 \leq f(x) - \int_x^{2x} \frac{dt}{t} = f(x) - \ln 2 \leq \int_x^{2x} t \, dt = \frac{3}{2}x^2 \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0.$$

$$\text{En } +\infty : f(x) \geq \frac{\text{ch}(x)}{2x}(2x - x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty.$$

$$\textbf{Exercice 8} \quad [\text{ sujet}] \quad \frac{1}{t^2} - \frac{1}{(\arctan t)^2} \xrightarrow{t \rightarrow 0} -\frac{2}{3}$$

$$\text{Donc } \int_x^1 \frac{dt}{(\arctan t)^2} \underset{x \rightarrow 0}{=} \int_x^1 \frac{dt}{t^2} + C + o(1) \text{ avec } C = \int_0^1 \frac{1}{(\arctan t)^2} - \frac{1}{t^2} dt ; \text{ on en déduit } \int_x^1 \frac{dt}{(\arctan t)^2} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{x}.$$

$$\textbf{Exercice 9} \quad [\text{ sujet}] \quad \textbf{1. } g : t \mapsto e^{-t^2} \text{ est continue sur } \mathbb{R} \text{ donc } \phi \text{ est définie sur } \mathbb{R}^* ; \text{ comme } \phi(x) = \int_0^x g(t) \, dt -$$

$$\int_0^{1/x} g(t) \, dt, \phi \text{ est } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}^* \text{ et } \phi'(x) = g(x) + \frac{1}{x^2}g(1/x)$$

$$\textbf{2.} \text{ En posant } u = -t, \text{ on prouve que } \phi \text{ est impaire. } \phi \geq 0 \text{ sur } [1, +\infty[, \phi \leq 0 \text{ sur }]0, 1].$$

$$\textbf{3.} \lim_{+\infty} \phi = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \, dt = I \text{ car } t \mapsto e^{-t^2} \text{ est intégrable sur } \mathbb{R}^+.$$

$$\textbf{4.} \text{ Pour la même raison, } \lim_{0^+} \phi = -I \text{ et par imparité, } \lim_{0^-} \phi = I ; \text{ comme } I \neq 0, \phi \text{ n'a pas de limite en } 0.$$

$$\textbf{Exercice 10} \quad [\text{ sujet}] \quad \textbf{1. } f(x) - \int_1^x \frac{dt}{t} = \int_1^x \frac{e^t - 1}{t} \, dt \xrightarrow{x \rightarrow 0} - \int_0^1 \frac{e^t - 1}{t} \, dt \text{ (intégrable car } \underset{t \rightarrow 0}{\sim} 1) \text{ donc } f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \int_1^x \frac{dt}{t} + C + o(1) \text{ et } f(x) \underset{0}{\sim} \ln(x).$$

$$\textbf{2. } f(x) - \ln(x) = \int_1^x \frac{e^t - 1}{t} \, dt \xrightarrow{x \rightarrow 0} \int_1^0 \frac{e^t - 1}{t} \, dt.$$

$$\textbf{Exercice 11} \quad [\text{ sujet}] \quad \textbf{1.} \text{ Si } x > 0 \, t \mapsto \frac{e^{-t}}{t} \text{ est intégrable sur } [x, +\infty[\text{ (car } \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)) \text{ donc } f(x) \text{ existe. Comme}$$

$$f(x) = f(1) - \int_1^x \frac{e^{-t}}{t} \, dt \text{ et } t \mapsto \frac{e^{-t}}{t} \text{ est continue sur } \mathbb{R}^{+*}, f \text{ est } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}^{+*} \text{ et } f'(x) = -\frac{e^{-x}}{x}$$

$$\textbf{2.} \text{ En } 0 : f(x) - \int_x^1 \frac{dt}{t} = f(1) + \int_x^1 \frac{e^{-t} - 1}{t} \, dt \xrightarrow{x \rightarrow 0} f(1) + \int_0^1 \frac{e^{-t} - 1}{t} \, dt \text{ (intégrable car limite finie en } 0) \text{ donc}$$

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \int_x^1 \frac{dt}{t} + C + o(1) \text{ et } f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \int_x^1 \frac{dt}{t} = -\ln(x)$$

$$\text{En } +\infty : (\text{IPP}) \, f(x) = \frac{e^{-x}}{x} - \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2} \, dt \text{ puis } 0 \leq \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2} \, dt \leq \frac{1}{x^2} \int_x^{+\infty} e^{-t} \, dt = \frac{e^{-x}}{x^2} \text{ donc } \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2} \, dt \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{e^{-x}}{x}\right) \text{ et } f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^{-x}}{x}$$

$$\textbf{3. } f \text{ est intégrable sur } \mathbb{R}^{+*} \text{ d'après les équivalents précédents puis par IPP } \int_0^{+\infty} f(t) \, dt = \left[tf(t)\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} tf'(t) \, dt =$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-t} \, dt = 1$$

$$\textbf{Exercice 12} \quad [\text{ sujet}] \quad \textbf{1.} \text{ Si } x > 0 \, t \mapsto \frac{e^{-t}}{t} \text{ est intégrable sur } [x, +\infty[\text{ (car } \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)) \text{ donc } f(x) \text{ existe. Comme}$$

$$f(x) = f(1) - \int_1^x \frac{e^{-t}}{t} \, dt \text{ et } t \mapsto \frac{e^{-t}}{t} \text{ est continue sur } \mathbb{R}^{+*}, f \text{ est } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}^{+*} \text{ et } f'(x) = -\frac{e^{-x}}{x}$$

$$\textbf{2.} \text{ a) } f(x) \leq \frac{1}{x} \int_x^{+\infty} e^{-t} \, dt = \frac{e^{-x}}{x}.$$

$$\text{b) IPP}$$

$$\text{c) } f \text{ est continue sur } \mathbb{R}^{+*}. \text{ Comme } f \geq 0, \text{ avec } \textbf{2.a}, \text{ on } f(x) \underset{+\infty}{=} o(e^{-x}). \text{ Comme } \int_0^{+\infty} e^{-t} \ln t \, dt \text{ existe } (\underset{0}{\sim} \ln t), f(x) \underset{0}{\sim} -\ln x \text{ donc } f \text{ est intégrable en } 0.$$

$$\textbf{3.} \text{ Par IPP } \int_0^{+\infty} f(t) \, dt = \left[tf(t)\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} tf'(t) \, dt = \int_0^{+\infty} e^{-t} \, dt = 1$$

- Exercice 13** [sujet] 1. Si $x > 0$ $g : t \mapsto \frac{1}{t(e^{\sqrt{t}} - 1)}$ est continue sur $[x, +\infty[$ et intégrable car $\frac{1}{t(e^{\sqrt{t}} - 1)} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ donc $f(x)$ existe
2. $g(t) - \frac{1}{t\sqrt{t}} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} -\frac{1}{2t}$ donc il existe α tel que sur $]0, \alpha]$, on ait $\left|g(t) - \frac{1}{t\sqrt{t}}\right| \leq \frac{1}{t}$. On a alors $f(x) = f(\alpha) + \int_{\alpha}^x g(t) - \frac{1}{t\sqrt{t}} dt + \int_x^{\alpha} \frac{dt}{t\sqrt{t}}$; puis $\int_x^{\alpha} \frac{dt}{t\sqrt{t}} = \left[\frac{2}{\sqrt{t}}\right]_x^{\alpha} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{2}{\sqrt{x}}$ et $\left|\int_x^{\alpha} g(t) - \frac{1}{t\sqrt{t}} dt\right| \leq \int_x^{\alpha} \frac{dt}{t} = [\ln t]_x^{\alpha} \underset{x \rightarrow 0}{=} o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ d'où le résultat.
3. Poser $s = \sqrt{t}$ puis $f(x) = 2 \int_{\sqrt{x}}^{+\infty} \frac{e^{-s}}{s(1 - e^{-s})} ds$ et IPP $f(x) = -2 \frac{\ln(1 - e^{-\sqrt{x}})}{\sqrt{x}} + 2 \int_{\sqrt{x}}^{+\infty} \frac{\ln(1 - e^{-s})}{s^2} ds$. Ensuite, $\frac{\ln(1 - e^{-\sqrt{x}})}{\sqrt{x}} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$ et comme $\frac{\ln(1 - e^{-s})}{s^2} \underset{s \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{e^{-s}}{s^2}$ il existe A tel que si $s > A$ on ait $\left|\frac{\ln(1 - e^{-s})}{s^2}\right| \leq 2 \frac{e^{-s}}{s^2}$; enfin pour $x > A$, on a $\left|\int_{\sqrt{x}}^{+\infty} \frac{\ln(1 - e^{-s})}{s^2} ds\right| \leq 2 \int_x^{+\infty} \frac{e^{-s}}{s^2} ds \leq \frac{1}{x} \int_{\sqrt{x}}^{+\infty} e^{-s} ds = \frac{e^{-\sqrt{x}}}{x} \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\right)$
4. Il suffit de prouver que f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ pour terminer la justification de l'intégrabilité et faire une IPP : $f(x) = \int_1^x g(t) dt + f(1)$ et g continue sur $\mathbb{R}^{+*}$ permet de conclure.

- Exercice 14** [sujet] 1. Si $x < 0$, $\min\left(x, \frac{1}{\sqrt{t}}, \frac{1}{t^2}\right) = x$ donc l'intégrale DV, $f(0) = 0$ et si $x > 0$, $\min\left(x, \frac{1}{\sqrt{t}}, \frac{1}{t^2}\right) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} x$ et $\min\left(x, \frac{1}{\sqrt{t}}, \frac{1}{t^2}\right) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{t^2}$ (sans oublier que la fonction est $\mathcal{CM}^0$ sur $\mathbb{R}^{+*}$)
- Si $x \leq 1$ alors $f(x) = \int_0^{1/\sqrt{x}} x dt + \int_{1/\sqrt{x}}^{+\infty} \frac{dt}{t^2} = 2\sqrt{x}$ et si $x > 1$, $f(x) = \int_0^{1/x^2} x dt + \int_{1/x^2}^1 \frac{dt}{\sqrt{t}} + \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2} = 3 - \frac{1}{x}$.
2. f est continue en 1 et dérivable en 1 (et même $\mathcal{C}^1$)

- Exercice 15** [sujet] 1. a) $f'(x+1) = f(x+2) - f(x+1) = [f(x+2) - f(x)] - [f(x+1) - f(x)] = 2f'(x) - f'(x)$
- b) $g(x) = \int_x^{x+1} f'(t) dt$; f' est continue donc g est dérivable et $g'(x) = f'(x+1) - f'(x) = 0$; $g = \lambda$. De plus $g(x) = f(x+1) - f(x)$ donc $f'(x) = f(x+1) - f(x) = \lambda$
2. Récip toute fonction affine vérifie bien (*)

- Exercice 16** [sujet] 1. Facile
2. a) Vérification de $f_n \in W_h$ facile (les 2 intégrales sont nulles) puis f_n est un vecteur propre de $f \mapsto f''$ avec la valeur propre $\left(\frac{2n\pi}{h}\right)^2$ donc c'est une famille de vecteurs propre associé à des valeurs propres 2 à 2 distinctes donc une famille libre (sinon prendre une combinaison linéaire finie, dériver deux fois et raisonner par récurrence, cf preuve de la prop précédemment évoquée). On en déduit que W_h n'est pas de dimension finie.
- b) En dérivant par rapport à x , on trouve $f(x+2h) - f(x+h) = 2(f(x+h) - f(x))$ donc inclusion ok. Si $f = u + v$ (analyse) alors $T_h(f) = u + 2v$ donc $v = T_h(f) - f$ et $u = 2f - T_h(f)$ (unique) et synthèse ok
- c) u et v sont continues (car f et $T_h(f)$ le sont), et u est h -périodique donc bornée donc v est bornée. Si $v(x_0) \neq 0$ alors $v(x_0 + nh) = 2^n v(x_0)$ n'est pas bornée donc $v = 0$ et $f = u$ est h -périodique.
3. Si f est h -périodique alors $\int_{x+h}^{x+2h} f(t) dt = \int_0^h f(t) dt$ et $\int_x^{x+h} f(t) dt = \int_0^h f(t) dt$ donc $f \in W_h$ si et seulement si $\int_0^h f(t) dt = 0$ (valeur moyenne nulle) donc W_h est l'ensemble des fct h -périodiques dont la valeur moyenne est nulle.

- Exercice 17** [sujet] 1. Linéarité évidente et comme f est continue, $\varphi(f)$ est $\mathcal{C}^1$ donc continue; $|\varphi(f)(x)| \leq \|f\|_{\infty}$
2. On vérifie par récurrence sur n que $\varphi^n(f)$ est $\mathcal{C}^n$, que $(\varphi^n(f))^{(k)}(0) = 0$ si $k \leq n-1$ et $(\varphi^n(f))^{(n)} = f$. On applique ensuite la formule de Taylor avec reste intégral à $\varphi^n(f)$: $\varphi^n(f)(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f(t) dt$ ce qui donne $|\varphi^n(f)(x)| \leq \|f\|_{\infty} \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} dt = \|f\|_{\infty} \frac{x^n}{n!} \leq \frac{\|f\|_{\infty}}{n!}$ donc $\|\varphi^n(f)\|_{\infty} \leq \frac{\|f\|_{\infty}}{n!}$

- Exercice 18** [sujet] 1. Linéarité facile, $u(f)(0) = 0$ et comme $u(f)(x) = \cos(x) \int_0^x f \times \cos + \sin(x) \int_0^x f \times \sin$, la continuité de f donne la classe $\mathcal{C}^1$ de $u(f)$.

2. Si $u(f) = k$ alors $k = u(f)(0) = 0$ et $u(f)' = 0$ et $u(f)'(x) = f(x) - \sin(x) \int_0^x f \times \cos + \cos(x) \int_0^x f \times \sin$ donc $f(0) = 0$ et $f(x) = \sin(x) \int_0^x f \times \cos - \cos(x) \int_0^x f \times \sin$ est $\mathcal{C}^1$ puis $f'(x) = \cos(x) \int_0^x f \times \cos - \sin(x) \int_0^x f \times \sin = u(f)(x) = 0$; reste $f = 0$.
3. Si $\lambda \neq 0$ alors $f = \frac{1}{\lambda}u(f)$ est $\mathcal{C}^1$ puis $f(0) = 0$ et $\lambda f'(x) = f(x) - \sin(x) \int_0^x f \times \cos + \cos(x) \int_0^x f \times \sin$ donc f est $\mathcal{C}^2$, $f'(0) = 0$ et $f''(x) = f'(x) - u(f)(x) = f'(x) - \lambda f(x)$; la seule solution avec $f(0) = f'(0) = 0$ est $f = 0$.

Exercice 19 [sujet] 1. Linéarité facile; comme $f(x) = \int_0^x f(t) dt = 0 + f(0)x + o(x)$ et $\lim_0 T(f) = f(0)$ donc $T(f)$ est continue.

2. T est injectif : si $T(f) = 0$ alors $\int_0^x f(t) dt = 0$ pour tout $x > 0$; en dérivant, on obtient $f = 0$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ donc sur $\mathbb{R}^+$ par continuité.
 T n'est pas surjectif : si $g = T(f)$ alors g est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ (car f est continue) donc toute fonction continue sur $\mathbb{R}^+$ et non dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ n'a pas d'antécédent ($x \mapsto |x-1|$ par exemple)
3. Si $\lambda \neq 0$ et $x > 0$ alors $f = \frac{1}{\lambda}T(f)$ est $\mathcal{C}^1$ et $\lambda(xf'(x) + f(x)) = f(x)$, ce qui donne $f(x) = \frac{\alpha}{x^{1-1/\lambda}}$ pour $x > 0$.
 Si $\lambda < 0$ ou $\lambda > 1$ ces solutions ne se prolongent pas par continuité en 0 donc pas de solution autre que $f = 0$; si $\lambda = 1$ toutes les solutions constantes conviennent et si $\lambda \in]0, 1[$, on a aussi $\lambda f(0) = f(0)$ donc $f(0) = 0$ puis $f = 0$.

Exercice 20 [sujet] 1. $2G(x) = \int_0^x (x-t)g(t) dt + \int_x^1 (t-x)g(t) dt = x \int_0^x g(t) dt - \int_0^x tg(t) dt - \int_1^x tg(t) dt + x \int_1^x g(t) dt$ donc G est $\mathcal{C}^1$ (car g est continue) et $2G'(x) = \int_0^x g(t) dt + \int_1^x g(t) dt$; G' est $\mathcal{C}^1$ et $G'' = g$.

2. $f'' = g$ est toujours vrai et $f(0) = f(1) = 0$ donne un système linéaire fixant a et b .
3. Si h est une autre fonction telle que $h'' = g$ et $h(0) = h(1) = 0$ alors $h'' = g = f''$ donc $h(x) = f(x) + \alpha x + \beta x$ et $h(0) = f(0) = h(1) = f(1) = 0$ donne $a = b = 0$ donc solution unique.

Exercice 21 [sujet] 1. Si $f'' = 0$ alors $f(x) = ax + b$ puis $f(0) = f(1) = 0$ donne $f = 0$ et ϕ est injective. Soit $f \in F$ et F telle que $F'' = f$ (existe car f est continue), on peut trouver (a, b) tel que si $G(x) = F(x) + ax + b$, on ait $G(0) = G(1) = 0$ (et on aura encore $G'' = f$) donc ϕ est surjective.

2. $2G(x) = \int_0^x (x-t)g(t) dt + \int_x^1 (t-x)g(t) dt = x \int_0^x g(t) dt - \int_0^x tg(t) dt - \int_1^x tg(t) dt + x \int_1^x g(t) dt$ donc G est $\mathcal{C}^1$ (car g est continue) et $2G'(x) = \int_0^x g(t) dt + \int_1^x g(t) dt$; G' est $\mathcal{C}^1$ et $G'' = g$.

3. On cherche (a, b) de sorte que $x \mapsto G(x) + ax + b$ s'annule en 0 et 1 et on trouve $\phi^{-1}(f)(x) = \frac{1}{2} \int_0^1 |x-t|f(t) dt - \frac{x}{2} \int_0^1 (1-2t)f(t) dt - \frac{1}{2} \int_0^1 tf(t) dt$ donc $k(x, t) = \frac{1}{2}(|x-t| - x(1-2t) - t)$. k est continue sur le fermé borné $[0, 1]^2$ donc il suffit de prendre $C \geq \max_{[0, 1]^2} |k(x, t)| = \frac{1}{4}$ (la valeur de ce maximum se trouve par une étude de points critiques sur les domaines $x > t$ et $x < t$; il est atteint en $x = t = \frac{1}{2}$)

Exercice 22 [sujet] Si f est solution alors $f'(0) = 10$ et $f'(x) = 10 - 5 \cos(x) \int_0^x f \times \cos - 5 \sin(x) \int_0^x f \times \sin$ est $\mathcal{C}^1$; on en déduit $f''(x) = 5f(x) + 5 \sin(x) \int_0^x f \times \cos - 5 \cos(x) \int_0^x f \times \sin$ qui est à nouveau $\mathcal{C}^1$. Enfin on trouve $f''(0) = 5f(0) = 10$ et $f'''(x) = 5f'(x) + 5 \cos(x) \int_0^x f \times \cos + 5 \sin(x) \int_0^x f \times \sin = 5f'(x) + 10 - f'(x)$. On en déduit f avec l'équation différentielle vérifiée par f' et les conditions initiales sur f, f' et f'' : $f(x) = \frac{35}{8}e^{2x} - \frac{15}{8}e^{-2x} - \frac{5}{2}x + 10$

Exercice 23 [sujet] 1. Pour $x > 0$, on a $f(x) \stackrel{u=x-t}{=} \frac{1}{x^2} \left(2x \int_0^x f(u) du - 2 \int_0^x uf(u) du \right)$ donc f est $\mathcal{C}^1$ car f et $id \times f$ sont $\mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ puis $\mathcal{C}^\infty$ par récurrence

2. On trouve $x^2 f''(x) + 4x f'(x) = 0$
3. Sur $\mathbb{R}^{+*}$, on a $f(x) = \frac{\alpha}{x^3} + \beta$ et comme f est continue sur $\mathbb{R}^+$, on doit avoir $\alpha = 0$; réciproquement les fonctions constantes sont solutions

Exercice 24 [sujet] 1. Linéarité facile ; $\phi(f)(x) = \int_0^x tf(t) dt + x \int_x^1 f(t) dt$ donc, comme f est continue, $\phi(f)$ est $\mathcal{C}^1$ donc continue.

ϕ est injectif : si $\phi(f) = 0$ alors $\phi(f)' = 0$ et $\phi(f)'(x) = \int_x^1 f(t) dt$ qui est $\mathcal{C}^1$ donc $f = -\phi(f)'' = 0$

Si $g = \phi(f)$ alors g est $\mathcal{C}^2$, $g(0) = 0$ et $g'(1) = 0$: $\text{Im } \phi \subset \{g \in \mathcal{C}^2, g(0) = g'(1) = 0\}$. Réciproquement avec g dans cet ensemble, on vérifie $g = -\phi(g'')$

2. $(\phi(f))'' = -f$.

Exercice 25 [sujet] 1. Non (cf cours)

2. $g(x) = f(x) + \sin(x) \int_0^x af \times \cos - \cos(x) \int_0^x af \times \sin$ donc $g'(x) = f'(x) + \cos(x) \int_0^x af \times \cos + \sin(x) \int_0^x af \times \sin$
et $g''(x) = f''(x) + af(x) - \sin(x) \int_0^x af \times \cos + \cos(x) \int_0^x af \times \sin = -g(x)$

3. $g = \alpha \cos + \beta \sin$ est bornée ($|g| \leq c$) puis $|f(x)| \leq |g(x)| + \left| \int_0^x \sin(x-t)a(t)f(t) dt \right| \leq c + \int_0^x 0^x |af|$

4. On pose $u(x) = c + \int_0^x |af|$; u est $\mathcal{C}^1$, strictement positive (car $c > 0$) et vérifie $\frac{u'(x)}{u(x)} \leq |a(x)|$. On en déduit $u(x) \leq c \exp \int_0^x |a| \leq c \exp \int_0^{+\infty} |a|$ et avec $|f| \leq u$, on trouve f bornée.

Exercice 26 [sujet] 1. Si $\varphi = -\alpha^2 < 0$ alors $y(t) = ae^{\alpha t} + be^{-\alpha t}$; si $\varphi = 0$ alors $y(t) = at + b$ et si $\varphi = \omega^2 > 0$ alors $y(t) = a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t)$.

2. fg et g sont continues donc F et G sont $\mathcal{C}^1$ et $\left(\frac{F}{G}\right)'(t) = \frac{g(t)(f(t) - F(t))}{G(t)} \leq 0$. On a donc $\frac{F(t)}{G(t)} \leq \frac{F(0)}{G(0)} = M$ ce qui donne le résultat en réutilisant $f(t) \leq F(t)$.

3. a) On a $z(t) = -t \int_a^t y(u)\varphi(u) du + \int_a^t uy(u)\varphi(u) du$ donc $z''(t) = -\varphi(t)y(t) = y''(t)$ et on a bien $z(t) = y(t) + \alpha t + \beta$

b) On a $\left|\frac{y(t)}{t}\right| \leq \frac{|\alpha t + \beta|}{t} + \int_a^t \left(1 - \frac{u}{t}\right) |y(u)\varphi(u)| du$. Puis $\frac{|\alpha t + \beta|}{t} \leq |\alpha| + \frac{|\beta|}{a} = M$ sur $[a, +\infty[$ (car $a > 0$)
et $\int_a^t \left(1 - \frac{u}{t}\right) |y(u)\varphi(u)| du \leq \int_a^t |y(u)\varphi(u)| du = \int_a^t \left|\frac{y(u)}{u}\right| \times u|\varphi(u)| du$. On peut donc appliquer 2, ce qui donne $\left|\frac{y(t)}{t}\right| \leq M \exp\left(\int_a^t |u\varphi(u)| du\right) \leq M \exp\left(\int_a^{+\infty} u|\varphi(u)| du\right)$.

Exercice 27 [sujet] 1. $\frac{\ln(1-t^2)}{(1+t)^2} \sim \frac{1}{4} \ln(1-t)$ et $\mathcal{CM}^0$ sur $[0, 1[$ donc intégrable.

2. $\mathcal{CM}^0$ sur $]0, 1]$ et $\sim \ln(t)$ donc intégrable.

3. $\mathcal{CM}^0$ sur $]1, +\infty[$, $\sim \frac{1}{4} \ln(t-1)$ et $\sim 2 \frac{\ln t}{t^2} = o\left(\frac{1}{t^{3/2}}\right)$ donc intégrable.

4. $\mathcal{CM}^0$ sur $]0, +\infty[$. La fonction est positive donc intégrable équivaut à intégrale CV. Si $\beta = 0$ par intégrable; si $\beta > 0$, $\sim o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ et $\sim \frac{1}{t^{-\alpha}}$ donc intégrable si et seulement si $\alpha > -1$; si $\beta < 0$, $\sim \frac{1}{t^{-\alpha}}$ et $\xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$ donc intégrable si et seulement si $\alpha < -1$

5. $\mathcal{CM}^0$ sur $]1, +\infty[$, $\sim \frac{1}{\beta} (t-1)^{\alpha-1}$ et $\sim \frac{1}{t^\beta (\ln t)^{-\alpha}}$ (Bertrand) donc intégrable (ou CV car signe fixe) si et seulement si $\alpha > 0$ et $\beta > 1$.

6. $\mathcal{CM}^0$ sur $]0, +\infty[$ et par IPP (justifier!) $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t} - \sin t} dt$ de même nature que $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(t) \left(\frac{1}{2\sqrt{t}} - \cos t\right)}{(\sqrt{t} - \sin t)^2} dt$ puis $\frac{\cos(t) \left(\frac{1}{2\sqrt{t}}\right)}{(\sqrt{t} - \sin t)^2} \underset{+\infty}{=} O\left(\frac{1}{t^{3/2}}\right)$ donc intégrable et $\frac{\cos^2(t)}{(\sqrt{t} - \sin t)^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\cos^2 t}{t}$ non intégrable (même preuve que $\frac{\sin t}{t}$)

Exercice 28 [sujet] $tf(t) = \exp\left[\frac{1}{\sqrt{t}} \left(1 + \sqrt{t} \ln t \left(\frac{\sin t}{t} + 1\right)\right)\right] \xrightarrow{t \rightarrow 0} +\infty$ donc $\frac{1}{t} \underset{0}{=} o(f(t))$ donc non intégrable.

Exercice 29 [sujet] $\mathcal{CM}^0$ sur $\mathbb{R}^{+*}$, $\underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} e^{-t}$ et $\xrightarrow{t \rightarrow 0} \frac{1}{2}$ donc CV

Exercice 30 [sujet] $f : t \mapsto e^{\sin^2 t/t^\alpha} - 1$ est $\mathcal{CM}^0$ sur $\mathbb{R}^{+*}$, comme $\alpha > 0$ $f(t) \underset{+\infty}{\sim} \frac{\sin^2 t}{t^\alpha} = O\left(\frac{1}{t^\alpha}\right)$ donc f est intégrable sur $[1, +\infty[$ si $\alpha > 1$. Pour $\alpha = 1$, on vérifie que $t \mapsto \frac{\sin^2 t}{t}$ n'est pas intégrable sur $[1, +\infty[$ car $\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin^2 t}{t} dt \geq \frac{\pi}{2(n+1)\pi}$ puis $\frac{\sin^2 t}{t} \underset{+\infty}{=} o(f(t))$ pour $\alpha < 1$.

Si $\alpha \leq 2$, f admet une limite finie en 0 alors que si $\alpha > 2$, $\frac{1}{t} = o(f(t))$ donc f n'est pas intégrable sur $]0, 1]$. En conclusion, f est intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$ (donc l'intégrale CV car $f \geq 0$) si et seulement si $\alpha \in]1, 2]$.

Exercice 31 [sujet] $\mathcal{CM}^0$ sur $]0, 1]$ si $\alpha > 0$ et $\underset{0}{=} O\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$ donc intégrable sur $]0, 1]$.

Exercice 32 [sujet] $\frac{e^{\sin t}}{t} \geq \frac{e^{-1}}{t}$ donc l'intégrale DV. Pour la seconde : $t \mapsto \sin(t) \sin\left(\frac{1}{t}\right)$ est $\mathcal{CM}^0$ sur $\mathbb{R}^{+*}$, $\lim_{t \rightarrow 0} \sin(t) \sin\left(\frac{1}{t}\right) = 0$ donc intégrable sur $]0, 1]$; $\sin(t) \left[\sin\left(\frac{1}{t}\right) - \frac{1}{t}\right] \underset{t \rightarrow +\infty}{=} O\left(\frac{1}{t^3}\right)$ donc $\int_1^{+\infty} \sin(t) \sin\left(\frac{1}{t}\right) dt$ et $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ sont de même nature donc CV (cf cours)

Exercice 33 [sujet] $\mathcal{CM}^0$ sur $]0, +\infty[$, $\frac{1}{0}$ et $\underset{+\infty}{=} o(e^{-\alpha x})$ donc intégrable si $\alpha > 0$

Exercice 34 [sujet] 1. $f(t) \underset{+\infty}{=} (1+a+b)\sqrt{t} + \frac{a+2b}{2\sqrt{t}} + O\left(\frac{1}{t^{3/2}}\right)$ donc l'intégrale CV si et seulement si $\begin{cases} a+b+1=0 \\ a+2b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-2 \\ b=1 \end{cases}$

$$2. \int_0^{+\infty} (\sqrt{t} - 2\sqrt{t+1} + \sqrt{t+2}) dt = \left[\frac{2t\sqrt{t}}{3} - \frac{4}{3}(t+1)\sqrt{t+1} + \frac{2}{3}(t+2)\sqrt{t+2} \right]_0^{+\infty} = \frac{4}{3}(\sqrt{2}-1) \text{ car } \frac{2t\sqrt{t}}{3} - \frac{4}{3}(t+1)\sqrt{t+1} + \frac{2}{3}(t+2)\sqrt{t+2} \underset{+\infty}{=} O\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right).$$

Exercice 35 [sujet] 1. $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ CV (cf cours) donc $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t) - \lambda}{t} dt$ CV si et seulement si $\int_1^{+\infty} \frac{\lambda}{t} dt$ CV, ce qui n'arrive que pour $\lambda = 0$.

2. On pose $F(x) = \int_0^x f(u) du$; il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $nT \leq x < (n+1)T$ (c'est $n = \left\lfloor \frac{x}{T} \right\rfloor$) et on a $F(x) = n \int_0^T f(u) du + \int_{nT}^x f(u) du$; comme f est continue et T -périodique, elle est bornée (et atteint ses bornes) sur le segment $[0, T]$ puis sur $\mathbb{R}$. On a donc $\left| \int_{nT}^x f(u) du \right| \leq T \|f\|_\infty$ (bornée) et donc avec $\lambda = \frac{1}{T} \int_0^T f(u) du$ (valeur moyenne de f), on a $F(x) = \lambda x + O(1)$. On fait alors une IPP avec $u'(t) = f(t) - \lambda$ et $v(t) = \frac{1}{t}$: on a $u(t)v(t) = \frac{F(t) - \lambda t}{t} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$ donc $\int_1^{+\infty} \frac{f(t) - \lambda}{t} dt$ et $\int_1^{+\infty} \frac{F(t) - \lambda t}{t^2} dt$ sont de même nature et la seconde converge car $\frac{F(t) - \lambda t}{t^2} = O\left(\frac{1}{t^2}\right)$.

Reste l'unicité : si l'intégrale CV aussi pour un $\mu \in \mathbb{R}$, par linéarité, $\int_1^{+\infty} \frac{\mu - \lambda}{t} dt$ est CV donc $\lambda - \mu = 0$.

Exercice 36 [sujet] Si P est constant alors I est DV. Si $P = aX + b$ est de degré 1 (avec $a > 0$ par exemple), on pose $x_n = \frac{n-b}{a}$ de sorte que $\lfloor P(x) \rfloor = n$ sur $[x_n, x_{n+1}[$; I est DV car la série $\sum \int_{x_n}^{x_{n+1}} (-1)^n dx$ est DV puisque $\int_{x_n}^{x_{n+1}} (-1)^n dx = (x_{n+1} - x_n)(-1)^n = \frac{1}{a}(-1)^n$.

Si $\deg(P) \geq 2$ (et le coefficient dominant de P est > 0 par exemple, donc $\lim_{+\infty} P = +\infty$), il existe un intervalle $[A, +\infty[$ sur lequel $P' > 0$ et $P'' > 0$. On définit x_n par $P(x_n) = n$ (th de bij); par croissance de P , on a $\lfloor P(x) \rfloor = n$ sur $[x_n, x_{n+1}[$ donc $\int_{x_n}^{x_{n+1}} (-1)^{\lfloor P(x) \rfloor} dx = (-1)^n (x_{n+1} - x_n)$ est alternée. Comme $P(x_n) = n$ et $P(x_{n+1}) = n+1$, on a $(n+1) - n = \int_{x_n}^{x_{n+1}} P'(t) dt$ donc, comme P' est croissante, on en déduit $(x_{n+1} - x_n)P'(x_n) \leq 1 \leq (x_{n+1} - x_n)P'(x_{n+1})$ puis $\frac{1}{P'(x_{n+1})} \leq x_{n+1} - x_n \leq \frac{1}{P'(x_n)}$. Ainsi la suite $(x_{n+1} - x_n)$ est décroissante et tend vers 0 car $\lim_{+\infty} P' = +\infty$. Par

CSSA, la série $\sum \int_{x_n}^{x_{n+1}} (-1)^{\lfloor P(x) \rfloor} dx$ CV. Reste à prouver la CV de I : si $x \in [A, +\infty[$, on encadre x par $x_n \leq x < x_{n+1}$ puis $\int_A^x f(t) dt = \int_A^{x_{n_0}} f(t) dt + \sum_{k=n_0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t) dt + \int_{x_n}^x f(t) dt$ et $\left| \int_{x_n}^x f(t) dt \right| \leq (x_{n+1} - x_n)$, car $|f| = 1$, donc tend vers 0. Comme la série CV, la somme partielle admet une limite finie et I CV.

- Exercice 37** [sujet] 1. $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} + \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \leq 0$ par concavité de $\ln$; $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n+1} - \ln\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) \geq 0$ et $u_n - v_n = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ donc (u_n) et (v_n) sont adjacentes
2. f_n est continue sur $\mathbb{R}^+$ et $f_n(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{t^{3n}}$ donc I_n existe. Puis $I_{n+1} - I_n = - \int_0^{+\infty} t \times \frac{t^2}{(1+t^3)^{n+1}} dt \stackrel{\text{IPP}}{=} \frac{1}{3n} I_n$.
3. On a $\ln(I_{n+1}) - \ln(I_n) = -\frac{1}{3n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc $\sum \left(\ln(I_{n+1}) - \ln(I_n) + \frac{1}{3n}\right)$ est ACV et, par télescopage, $\ln(I_n) - \ln(I_1) = -\frac{1}{3} H_{n-1} + K + o(1) = -\frac{1}{3} \ln(n) + K + \gamma + o(1)$; en composant par exp, on trouve l'équivalent souhaité.

- Exercice 38** [sujet] 1. $\frac{1}{t} - \arctan\left(\frac{1}{t}\right) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{3t^3}$
2. La fonction est intégrable par l'équivalent précédent et $\int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{t} - \arctan\left(\frac{1}{t}\right)\right) dt \stackrel{\text{IPP}}{=} \frac{\pi}{4} - 1 + \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{t} - \frac{t}{1+t^2}\right) dt = \frac{\pi}{4} - 1 + \frac{1}{2} \ln 2$

- Exercice 39** [sujet] 1. $\frac{1+X+X^2}{X(X+1)^2} = \frac{1}{X} - \frac{1}{(1+X)^2}$
2. $t \mapsto t \left\lfloor \frac{1}{t} \right\rfloor$ est $\mathcal{CM}^0$ sur $]0, 1]$ et $0 \leq t \left\lfloor \frac{1}{t} \right\rfloor \leq 1$ donc intégrable sur $]0, 1]$
3. $I = \sum_{k \geq 1} \int_{1/(k+1)}^{1/k} kt dt = \frac{1}{2} \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k} - \frac{k}{(k+1)^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\pi^2}{6} - 1\right)$

- Exercice 40** [sujet] 1. $\mathcal{C}^0$ sur $]0, 1]$ et $x^p(\ln x)^n \stackrel{0}{=} o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ (la fonction tend vers $\pm\infty$ en 0 si $p = 0$)
2. $I_{n,p} \stackrel{\text{IPP}}{=} \left[\frac{x^{p+1}}{p+1} (\ln x)^n \right]_0^1 - \frac{n}{p+1} \int_0^1 x^{p+1} \times \frac{1}{x} (\ln x)^{n-1} dx = -\frac{n}{p+1} I_{n-1,p}$; puis $I_{n,p} = (-1)^n \frac{n!}{(p+1)^{n+1}}$ (après n IPP)

- Exercice 41** [sujet] $\mathcal{CM}^0$ sur $]0, +\infty[$, $\underset{0}{\sim} -2 \ln t$ et $\underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{t^2}$ donc intégrable. Par IPP (justifier!) $I = 2 \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \pi$

- Exercice 42** [sujet] $\lim_0 f = 1$ et $f(t) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{3t^2}$ donc f est intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$.
- Par IPP, $\int_0^x t \arctan \frac{1}{t} dt = \frac{x^2}{2} \arctan \frac{1}{x} + \frac{1}{2} (x - \arctan x)$ donc $\int_0^x f(t) dt = \frac{1}{2} (x + \arctan x) - \frac{x^2}{2} \arctan \frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{4}$ car $x^2 \arctan \frac{1}{x} \underset{+\infty}{=} x + o(1)$.

- Exercice 43** [sujet] $\frac{1}{(1+x^2)(1+ixy)} \underset{x \rightarrow \pm\infty}{=} O\left(\frac{1}{x^2}\right)$ puis $I(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(1-ixy)}{(1+x^2)(1+x^2y^2)} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^2y^2)}$ (la partie imaginaire intégrée est impaire). On vérifie ensuite $I(y) = I(-y)$ en posant $t = -x$ et si $y \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$, $I(y) = \frac{1}{1-y^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{y^2}{1+x^2y^2}\right) dx = \frac{\pi}{1+y}$. On termine, soit en calculant directement $I(1)$, soit en vérifiant la continuité de I sur $\mathbb{R}^+$ par $\left| \frac{1}{(1+x^2)(1+ixy)} \right| = \frac{1}{(1+x^2)(1+x^2y^2)} \leq \frac{1}{1+x^2}$. En conclusion $I(y) = \frac{\pi}{1+|y|}$

- Exercice 44** [sujet] $\mathcal{CM}^0$ sur $]0, +\infty[$; si $\alpha = 0$ c'est nul, si $\alpha > 0 \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$ et si $\alpha < 0 \underset{0}{\sim} -\frac{1}{x^{-\alpha}}$; de l'autre côté, $\underset{+\infty}{\sim} 2\alpha e^{-2x}$ donc intégrable si et seulement si $\alpha > -1$.

- Exercice 45** [sujet] $\mathcal{CM}^0$ sur $[0, 1[$ et $\underset{1}{\sim} \frac{-\ln(1-x)}{\sqrt{2(1-x)}} = o\left(\frac{1}{(1-x)^{3/4}}\right)$ donc intégrable.

Exercice 46 [sujet] On a $x - \frac{a}{x} > 0 \Leftrightarrow x > \sqrt{a}$ donc on transforme $\int_{\sqrt{a}}^{+\infty} f\left(x - \frac{a}{x}\right) dx$ en posant $u = x - \frac{a}{x} \Leftrightarrow u = \frac{u + \sqrt{u^2 + 4a}}{2} : u \mapsto \frac{u + \sqrt{u^2 + 4a}}{2}$ est $\mathcal{C}^1$, strictement croissante et bijective de $\mathbb{R}^{+*}$ sur $]\sqrt{a}, +\infty[$ donc (CV équivalentes) $\int_{\sqrt{a}}^{+\infty} f\left(x - \frac{a}{x}\right) dx = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} f(u) \left(1 + \frac{u}{\sqrt{u^2 + 4a}}\right) du$ qui CV puisque $\left|f(u) \left(1 + \frac{u}{\sqrt{u^2 + 4a}}\right)\right| \leq 2|f(u)|$. En posant $u = \frac{a}{x} - x$ sur $]0, \sqrt{a}[$, on finit par $I = \int_0^{+\infty} f(u) du$.

Exercice 47 [sujet] 1. On pose (justifier!) $t = n\pi + \frac{\pi}{2} + x : \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{dt}{1 + t^2 |\cos t|} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{dx}{1 + (n\pi + \frac{\pi}{2} + x)^2 |\sin x|} \leq \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{dx}{1 + (n\pi)^2 |\sin x|}$. Sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, $\sin x \geq \frac{2}{\pi}x$ donc $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{dx}{1 + (n\pi)^2 |\sin x|} = 2 \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 + (n\pi)^2 \sin x} \leq \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 + 2n^2\pi x} = \frac{\ln(1 + n^2\pi^2)}{2n^2\pi} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$ donc la série est AC.

2. La fonction est $\mathcal{CM}^0$ et positive sur $[0, +\infty]$ donc si $x > 0$, il existe N tel que $(N + 1)\pi \geq x$ puis $\int_0^x f(t) dt \leq \sum_{k=0}^N \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} f(t) dt \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} f(t) dt$; la fonction est positive, les « intégrales partielles » sont majorées donc f est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 48 [sujet] 1. Poser (justifier!) $t = \pi - x$ sur la partie $x \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$ puis on trouve $I = \frac{\pi}{\sqrt{1 + a^2}}$
2. On pose $x = n\pi + u$ puis en utilisant $n\pi + u \geq n\pi$, on obtient $0 \leq u_n \leq \frac{\pi}{\sqrt{1 + (n\pi)^3}}$ (avec $a = (n\pi)^{3/2}$); on en déduit $u_n = O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$ donc $\sum u_n$ est AC
3. On prouve l'intégrabilité comme dans l'exercice précédent puisque la fonction est à nouveau positive.

Exercice 49 [sujet] On pose $t = n\pi + u$ (justifier!) $u_n = \int_0^\pi \frac{n\pi + u}{1 + (n\pi + u)^6 \sin^2 u} du \leq \int_0^\pi \frac{(n + 1)\pi}{1 + (n\pi)^6 \sin^2 u} du = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ (même calcul que dans l'exercice précédent); on conclut à l'intégrabilité de la même façon puisque la fonction est positive.

Exercice 50 [sujet] 1. $|I_n| \stackrel{\text{IPP}}{=} \left| \left[f(t) \frac{-\cos(nt)}{n} \right]_a^b + \frac{1}{n} \int_a^b f'(t) \cos(nt) dt \right| \leq \frac{1}{n} \left(|f(a)| + |f(b)| + \int_0^b |f'(t)| dt \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

2. a) fait en cours

b) $x \mapsto \frac{\sin nx}{x}$ est prolongeable par continuité en 0 donc K_n existe et $K_n \stackrel{u=nt}{=} \int_0^{n\pi/2} \frac{\sin u}{u} du \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} I$

c) On vérifie que $h(t) = \frac{1}{t} - \frac{1}{\sin t}$ se prolonge en une fonction $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ (faire des DL de h et h' pour vérifier la continuité puis la classe $\mathcal{C}^1$); on a alors $J_n - K_n = \int_0^{\pi/2} h(t) \sin nt dt$ puis on utilise Q1.

d) $\sin(2n + 3)t - \sin(2n + 1)t = 2 \sin t \cos(n + 1)t$ donne $J_{2n+3} = J_{2n+1}$ donc $J_{2n+1} = J_1 = \frac{\pi}{2}$

e) On en déduit que (K_n) tend vers $\frac{\pi}{2}$ et $I = \frac{\pi}{2}$

Exercice 51 [sujet] 1. $\int_1^{+\infty} \frac{\cos u}{u} du = \sin(1) + \int_1^{+\infty} \frac{\sin u}{u^2} du$ et $\left| \frac{\sin u}{u^2} \right| \leq \frac{1}{u^2}$.

2. v_n existe car $\sin^2 u \underset{0}{\sim} u^2$. $v_n = \int_0^1 \frac{1 - \cos 2u}{2\pi u} du + \int_1^{n\pi/2} \frac{du}{2\pi u} - \int_1^{n\pi/2} \frac{\cos 2u}{2\pi u} du$; tous les termes ont une limite finie quand $n \rightarrow +\infty$ à part $\int_1^{n\pi/2} \frac{du}{2\pi u} \sim \frac{\ln n}{2\pi}$

3. Par DL, $\varphi(0) = 0$ puis vérifier la classe $\mathcal{C}^1$ de φ par un DL de φ' en 0.

u_n existe car $\frac{\sin^2 u}{\tan u} \underset{0}{\sim} u$ et $\left| \frac{\sin^2 \pi nx}{\tan \pi x} \right| \leq \frac{1}{\tan \pi x} \xrightarrow{x \rightarrow 1/2^-} 0$. On a $u_n - v_n = \int_0^{1/2} \varphi(x) \frac{1 - \cos(2\pi nx)}{2} dx \stackrel{\text{IPP}}{=}$

$\frac{1}{2} \int_0^{1/2} \varphi(x) dx + \frac{1}{4n\pi} \int_0^{1/2} \varphi'(x) \sin(2\pi nx) dx \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O(1)$ car $\left| \int_0^{1/2} \varphi'(x) \sin(2\pi nx) dx \right| \leq \int_0^{1/2} |\varphi'(x)| dx$. On en déduit $u_n \sim v_n \sim \frac{\ln n}{2\pi}$.

Exercice 52 [sujet] 1. $\ln(\sin t) \underset{0}{=} \ln(t) + \ln(1 + o(1)) \sim \ln t$

2. En posant $u = \frac{\pi}{2} - t$, on vérifie $I = \int_0^{\pi/2} \ln(\cos t) dt$ donc $J = 2I$

3. $J = \int_0^{\pi/2} \ln\left(\frac{\sin 2t}{2}\right) dt \stackrel{u=2t}{=} -\frac{\pi}{2} \ln 2 + \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \ln(\sin u) du$ puis $\int_{\pi/2}^{\pi} \ln(\sin u) du \stackrel{t=\pi-u}{=} I$ donc au final on trouve $I = -\frac{\pi}{2} \ln 2$

Exercice 53 [sujet] 1. $t \mapsto \frac{\sin^3 t}{t^2}$ est $\mathcal{CM}^0$ sur $\mathbb{R}^{+*}$, tend vers 0 en 0 et $O\left(\frac{1}{t^2}\right)$ en $+\infty$

2. $\sin^3 t = \frac{1}{4}(3 \sin t - \sin 3t)$ donc (les intégrales CV) $I = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{3}{4} \int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2} dt - \frac{1}{4} \int_x^{+\infty} \frac{\sin 3t}{t^2} dt \right)$ puis poser $u = 3t$ dans la seconde (et relation de Chasles)

3. $t \mapsto \frac{\sin t}{t^2} - \frac{1}{t}$ est prolongeable par continuité en 0 donc $\lim_{x \rightarrow 0} \int_x^{3x} \left(\frac{\sin t}{t^2} - \frac{1}{t} \right) dt = 0$ et $I = \frac{3}{4} \lim_{x \rightarrow 0} \int_x^{3x} \frac{dt}{t} = \frac{3}{4} \ln 3$

Exercice 54 [sujet] 1. $\mathcal{CM}^0$ sur $]0, +\infty[$, $\xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ et $\underset{+\infty}{=} O\left(\frac{1}{x^2}\right)$.

2. $\sin^5 x = \frac{1}{16}(\sin 5x - 5 \sin 3x + 10 \sin x)$; après chgts de variables $u = 5x$ et $u = 3x$, on trouve $a = -\frac{5}{16}$ et $b = \frac{15}{16}$

3. $t \mapsto \frac{\sin t - t}{t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$ et tend vers 0 en 0 et $+\infty$ donc est bornée (à savoir prouver !)

4. On en déduit $\lim_{A \rightarrow 0} \int_A^{5A} \frac{\sin t}{t^2} dt = \lim_{A \rightarrow 0} \int_A^{5A} \frac{dt}{t} = \ln(5)$ puis $I = -\frac{5}{16} \ln 3 + \frac{15}{16} \ln 5$

Exercice 55 [sujet] 1. Par IPP (à justifier), $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t} dt$ et $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^2} dt$ sont de même nature et $\left| \frac{\sin(t)}{t} \right| \leq \frac{1}{t^2}$, donc intégrable sur $[1, +\infty[$

2. $\frac{\cos(\alpha t) - \cos(\beta t)}{t} \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$ donc int sur $]0, 1]$; l'intégrale sur $[1, +\infty[$ existe aussi par IPP (cf Q1). On vérifie, pour $x > 0$, $\int_x^{+\infty} \frac{\cos(\alpha t) - \cos(\beta t)}{t} dt \stackrel{u=\alpha t}{\underset{v=\beta t}{=}} \int_{\alpha x}^{+\infty} \frac{\cos(u)}{u} du - \int_{\beta x}^{+\infty} \frac{\cos(v)}{v} dv = \int_{\alpha x}^{\beta x} \frac{\cos(t)}{t} dt$ puis comme $t \mapsto \frac{\cos(t) - 1}{t}$ se prolonge par continuité en 0, on a $\lim_{x \rightarrow 0} \int_{\alpha x}^{\beta x} \frac{\cos(t) - 1}{t} dt = 0$, ce qui donne $I_{\alpha, \beta} = \lim_{x \rightarrow 0} \int_{\alpha x}^{\beta x} \frac{dt}{t} = \ln\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$

Exercice 56 [sujet] 1. Pour $I_n : \mathcal{CM}^0$ sur $]0, \pi]$ et $\underset{0}{\sim} \ln x$ donc intégrable. Pour $J_n : \mathcal{CM}^0$ sur $]0, \pi]$ et $\xrightarrow{x \rightarrow 0} 2n$ donc intégrable

2. IPP (justifier !) $I_n = -\frac{1}{2n} J_n$

3. $J_{n+1} = J_n$ si $n \geq 1$

4. fait en cours

5. Si $n \geq 1$ $I_n = -\frac{1}{2n} J_1 = -\frac{\pi}{n}$

Exercice 57 [sujet] $t \mapsto \frac{\sin^2 t}{t^2}$ est $\mathcal{CM}^0$ sur $]0, +\infty[$, $\xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$ et $\underset{+\infty}{=} O\left(\frac{1}{x^2}\right)$ donc intégrable; égalité et CV de la première intégrale : IPP (justifier !)

Exercice 58 [sujet] 1. $f(t) \underset{0}{=} 1 + o(1)$ donc $\int_0^x f(t) dt \underset{0}{=} 0 + x + o(x)$ et $\lim_0 g = 1$.

2. Avec $F(x) = \int_0^x f(t) dt = xg(x)$, (IPP) $\int_0^x f(t)g(t) dt = \left[F(t)g(t) \right]_0^x - \int_0^x F(t)g'(t) dt = xg(x)^2 - \int_0^x tg(t) \left(-\frac{1}{t}g(t) + \frac{f(t)}{t} \right) dt$ et regrouper

3. f^2 est $\mathcal{CM}^0$ sur $[0, +\infty[$ et $\sim_{+\infty} \frac{1}{t^2}$ donc intégrable sur $\mathbb{R}^+$. Puis $xg(x)^2 \geq 0$ donc (Cauchy-Schwarz) $\int_0^x g(t)^2 dt \leq 2 \left(\int_0^x f(t)^2 dt \right)^{1/2} \left(\int_0^x g(t)^2 dt \right)^{1/2}$ et en divisant $\int_0^x g(t)^2 dt \leq 4 \int_0^x f(t)^2 dt$ (même si $g^2 = 0$) puis $\int_0^x g(t)^2 dt \leq 4 \int_0^{+\infty} f(t)^2 dt$; « intégrales partielles » d'une fonction positive majorées donc intégrable.

Exercice 59 [sujet] Les deux fonction sont $\mathcal{CM}^0$ sur $]0, +\infty[$, $t^{\alpha+1}f'(t) \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 0$ car $\alpha + 1 > 0$ et $t^\alpha f(t) \underset{0}{=} O\left(\frac{1}{t^{-\alpha}}\right)$ intégrable sur $]0, 1]$ car $-\alpha < 1$. Par IPP $x^{\alpha+1}f(x) = \int_0^x t^{\alpha+1}f'(t) dt + (\alpha+1) \int_0^x t^\alpha f(t) dt$; Par hypothèse, $\int_0^{+\infty} t^\alpha f(t) dt$ CV et par négativité de f' , $\int_0^x t^{\alpha+1}f'(t) dt$ a une limite dans $\mathbb{R}^- \cup \{-\infty\}$ donc $x^{\alpha+1}f(x)$ a une limite dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$. Si la limite est non nulle, on a $\frac{1}{t} \underset{+\infty}{=} O(t^\alpha f(t))$ ce qui contredit l'intégrabilité de $t \mapsto t^\alpha f(t)$. La limite est nulle donc on a l'égalité, la CV des intégrales (et les intégrabilités car f' est de signe fixe).

Exercice 60 [sujet] On pose $g(t) = \frac{f(t)}{\sqrt{t}}$ et $h(t) = \frac{f(t)}{t}$ puis on vérifie $f'(t) = \sqrt{t}g'(t) + \frac{1}{2}h(t)$ et $f'(t)^2 = (\sqrt{t}g'(t))^2 + \frac{1}{4}(h(t))^2 + \frac{1}{2}(g^2)'(t)$ car $\sqrt{t}g'(t)h(t) = g'(t)g(t)$. En intégrant sur $[1, x]$, on arrive à $\int_1^x h(t)^2 dt \leq 4 \int_1^x f'(t)^2 dt \leq 4 \int_0^{+\infty} f'(t)^2 dt$, les « intégrales partielles » de $h^2 \geq 0$ sont majorées donc intégrable.

Exercice 61 [sujet] 1. $x^n e^{\omega x} \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ car $\operatorname{Re}(\omega) < 0$ puis $I_n \stackrel{\text{IPP}}{=} \left[x^n \frac{e^{\omega x}}{\omega} \right]_0^{+\infty} - \frac{n}{\omega} I_{n-1}$ donc $I_n = (-1)^{n+1} \frac{n!}{\omega^{n+1}}$. Comme $\omega^3 = 1$, on en déduit $\operatorname{Im}(I_{3n+2}) = 0$ donc $0 = \int_0^{+\infty} x^{3n+2} \operatorname{Im}(e^{\omega x}) dx \stackrel{t=x^3}{=} \frac{1}{3} \int_0^{+\infty} t^n \operatorname{Im}(e^{\omega t^{1/3}}) dt$; il suffit donc de prendre $f(t) = \frac{1}{3} e^{-t^{1/3}/3} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} t^{1/3}\right)$ (qui est bien continue sur $\mathbb{R}^+$).

2. Par linéarité on a $\int_a^b f(t)P(t) dt = 0$ pour tout polynôme P donc avec le polynôme P donné par le résultat admis ($\varepsilon > 0$ fixé), on a $\int_a^b f(t)^2 dt = \int_a^b f(t)(f(t) - P(t)) dt \leq \varepsilon(b-a)\|f\|_\infty$ donc $\int_a^b f(t)^2 dt = 0$ et $f = 0$ (car f^2 est continue et positive)

Exercice 62 [sujet] On a $\int_0^A f(x+1) - f(x-1) dx = - \int_{-1}^1 f(u) du + \int_{A-1}^{A+1} f(u) du$; pour $\varepsilon > 0$, si A grand alors $|f(u)| \leq \varepsilon$ sur $[A-1, +\infty[$ donc $\left| \int_{A-1}^{A+1} f(u) du \right| \leq 2\varepsilon$ donc tend vers 0 si A tend vers $+\infty$. On en déduit $\int_0^{+\infty} f(x+1) - f(x-1) dx = - \int_{-1}^1 f(u) du$. On fait de même sur l'autre partie et on trouve $I = 0$.

Exercice 63 [sujet] $t \mapsto e^{-t^2} e^{-xt}$ est $\mathcal{CM}^0$ sur $[0, +\infty[$, $\underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ donc intégrable pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Pour $x > 0$, $0 \leq f(x) \leq \int_0^{+\infty} e^{-xt} dt = \frac{1}{x}$ donc $\lim_{+\infty} f = 0$.

Exercice 64 [sujet] 1. Si $f \rightarrow L > 0$ alors $\int_0^x f^2(t) dt \rightarrow +\infty$ et $f(x) \int_0^x f^2(t) dt \rightarrow +\infty$ ce qui est absurde.

2. $f(t) = (1+t)^{-1/3}$ convient (avec $\ell = 3$)

3. On a $g'(x) = f^2(x)$ donc l'hypothèse est $\sqrt{g'(x)}g(x) \rightarrow \ell$ ou bien $g'(x)g^2(x) \rightarrow \ell^2$, ce qui signifie $\frac{1}{3}(g^3)'(x) \rightarrow \ell^2$.

Si $\lim_{+\infty} h' = 0$ alors $|h'(t)| < \varepsilon$ pour $x \geq A$ donc $\left| \frac{h(x) - h(0)}{x} \right| = \left| \frac{1}{x} \int_0^x h'(t) dt \right| \leq \frac{1}{x} \int_0^A |h'(t)| dt + \varepsilon \leq 2\varepsilon$ pour $x \geq B \geq A$, car A étant fixé, l'intégrale $\int_0^A |h'(t)| dt$ est une constante et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_0^A |h'(t)| dt = 0$. On a donc

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{h(x) - h(0)}{x} = 0$ donc $\frac{1}{x}h(x) \rightarrow 0$.

On utilise cette propriété avec $h(x) = \frac{1}{3}g^3(x) - \ell^2 x$: on a bien $h'(x) \rightarrow 0$ par hypothèse et $\frac{1}{x}h(x) = \frac{1}{3x}g^3(x) - \ell^2$;

on en déduit successivement $g^3(x) \sim 3x\ell^2$ puis $g(x) \sim (3x\ell^2)^{1/3}$ et enfin $f(x) \sim \frac{\ell}{g(x)} \sim \left(\frac{\ell}{3x}\right)^{1/3}$.

Exercice 65 [sujet] 1. Étudier la fonction

2. $\mathcal{CM}^0$ sur $]1, +\infty[$, $\underset{1}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2(x-1)}}$ et $\underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x^2}$ donc intégrable. Poser $u = \sqrt{x^2 - 1}$ (justifier !) $I = \int_0^{+\infty} \frac{du}{1+u^2} = \frac{\pi}{2}$.

3. $\frac{m}{n\sqrt{n^2 - m^2}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{m}{n^2}$ donc (reste de) série AC.

Par comparaison intégrale : $\int_n^{n+1} \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - m^2}} \leq \frac{1}{n\sqrt{n^2 - m^2}} \leq \int_{n-1}^n \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - m^2}}$ puis $\int_{m+1}^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - m^2}} \leq \frac{S_m}{m} \leq \int_m^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - m^2}}$ (CV par chgt de variable qui suit) ; on pose (justifier !) $x = mu$ et par encadrement, on arrive à

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} S_m = \int_1^{+\infty} \frac{du}{u\sqrt{u^2 - 1}} = \frac{\pi}{2}.$$