

TD2 : Intégration

Exercice 1

Justifier la convergence de $I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan t}{1+t^2} dt$, $I_2 = \int_0^1 \frac{e^t - 1}{t\sqrt{t}} dt$, $I_3 = \int_0^{+\infty} \frac{t+1}{t^3 + \sqrt{t}} dt$ et $I_4 = \int_0^{+\infty} \frac{t}{\operatorname{sh}(t)} dt$.

Exercice 2

Justifier que $\Gamma : x \mapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$ est définie sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Exercice 3 (CCP PSI 2018)

1. Trouver $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tels que $\frac{1+X+X^2}{X(X+1)^2} = \frac{a}{X} + \frac{b}{X+1} + \frac{c}{(X+1)^2}$
2. Justifier l'existence de $I = \int_0^1 t \left\lfloor \frac{1}{t} \right\rfloor dt$.
3. Calculer I , sachant que $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Exercice 4 (ICNA PSI 2019)

1. Pour quelle(s) valeur(s) de a et b , $\int_0^{+\infty} (\sqrt{t} + a\sqrt{t+1} + b\sqrt{t+2}) dt$ converge-t-elle? (*)
2. Calculer cette intégrale quand elle converge.

Exercice 5 (CCINP PSI 2023)

1. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \int_a^b f(x) \sin nx dx$. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$. (*)
2. Soit $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$.
 - a) Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(t)}{t^2} dt$ converge et en déduire que I converge. (*)
 - b) Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $K_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin nx}{x} dx$. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} K_n = I$.
 - c) On introduit $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin nx}{\sin x} dx$. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (J_n - K_n) = 0$.
 - d) Montrer que, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $J_{2p+1} = J_{2p-1}$. (*)
 - e) En déduire la valeur de I .

Exercice 6 (Mines-Ponts PSI 2022)

Soit $f(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$.

1. Montrer que f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et préciser f' .
2. Déterminer des équivalents de f en 0 et $+\infty$. (*)
3. Justifier la convergence de $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ et calculer cette intégrale.

Indications

Exercice 4

1. on peut calculer une primitive puis DL avec la précision $o(1)$ et discuter sur la valeur des coefficients.

Exercice 5

1. IPP
2. a) IPP
d) $\sin(p) - \sin(q) = ?$

Exercice 6

2. pour l'équivalent en $+\infty$, qui est $\frac{e^{-x}}{x}$, commencer par une IPP.