

Révisions et compléments d'algèbre linéaire

La notation $\mathbb{K}$ désigne soit le corps des nombres réels, soit le corps des nombres complexes.

I Rappels d'algèbre linéaire

1. Bases et dimension

Définition : Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et $\mathcal{F} = \{e_1, \dots, e_n\}$, une famille de n vecteurs de E .

1. $\mathcal{F}$ est **génératrice** de E si

$$\forall u \in E, \exists (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n, u = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$$

On le note $E = \text{Vect}\{e_1, \dots, e_n\}$

2. $\mathcal{F}$ est **libre** si

$$\forall (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n, \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i = 0 \Rightarrow \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \alpha_i = 0$$

3. $\mathcal{F}$ est une **base** de E si $\mathcal{F}$ est libre et génératrice.

Dans ce cas, on note $n = \dim(E)$ la dimension de E

Exemple(s) :

(I.1) Montrer que les ensembles suivants sont des espaces vectoriels, en trouver une base et la dimension

- a) $E_1 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x + y + z + t = x + 2y + 3z + 4t = 0\}$
- b) $E_2 = \{P \in \mathbb{K}_3[X], P(0) = P'(1) \text{ et } P(1) = 0\}$
- c) $E_3 = \left\{ \begin{pmatrix} a & a+b & 0 \\ 2c & 0 & a-b+c \end{pmatrix}, (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$
- d) $E_4 = \{\alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3 + \delta e_4, \alpha + \beta - \delta = 0\}$ où (e_1, e_2, e_3, e_4) est une base de E .
- e) $E_5 = \text{Vect}\{(1, 2, 1), (1, -1, -1), (-1, 4, 3)\}$

Théorème [I.1] : (Théorème de la base incomplète)

Soient E un espace vectoriel de dimension finie, $\mathcal{L}$ une famille libre de E et $\mathcal{G}$ une famille génératrice de E . Alors

on peut compléter $\mathcal{L}$ en une base de E à l'aide de vecteurs de $\mathcal{G}$

ie, il existe des vecteurs $g_1, \dots, g_p \in \mathcal{G}$ tels que $\mathcal{L} \cup \{g_1, \dots, g_p\}$ soit une base de E .

Remarque(s) :

(I.2) Comme $\mathcal{L} = \emptyset$ est une famille libre, on peut extraire une base de E de toute famille génératrice de E .

Exemple(s) :

(I.3) Soient $u = (0, 1, 2, 3)$, $v = (1, 0, 2, 3)$ et $w = (1, 2, 0, 3)$. Montrer que (u, v, w) peut être complété en une base de $\mathbb{R}^4$ puis la compléter.

Propriété [I.2] : Soient E un espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{F}$ une famille de n vecteurs de E . Alors on a équivalence de

- i. $\mathcal{F}$ est une base de E .
- ii. $\mathcal{F}$ est génératrice de E .
- iii. $\mathcal{F}$ est libre.

Exemple(s) :

- (I.4) Les familles suivantes forment-elles une base de $G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x - 4y + t = y + z - t = 0\}$?
- a) $((2, 1, 1, 2), (1, 1, 1, 1))$
 - b) $((2, 1, 1, 2))$
 - c) $((2, 1, 1, 2), (4, 1, -1, 0))$

2. Matrices

Définition : Matrice d'une application linéaire

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimensions finies, $\mathcal{B}_E = (e_1, \dots, e_p)$ et $\mathcal{B}_F = (f_1, \dots, f_n)$ des bases de E et F respectivement. Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$, on définit la **matrice de f dans les bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$** par

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_E \rightarrow \mathcal{B}_F}(f) = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \text{ avec } \forall j \in \llbracket 1, p \rrbracket, f(e_j) = \sum_{i=1}^n a_{i,j} f_i$$

Cela signifie que la $j^{\text{ème}}$ colonne contient les coordonnées du vecteur $f(e_j)$ dans la base $\mathcal{B}_F$.
Si f est un endomorphisme de E , on note $\text{Mat}_{\mathcal{B}_E}(f)$ la matrice $\text{Mat}_{\mathcal{B}_E \rightarrow \mathcal{B}_E}(f)$.

Attention : Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ alors le nombre de colonnes de $\text{Mat}_{\mathcal{B}_E \rightarrow \mathcal{B}_F}(f)$ est la dimension de E ; la dimension de F est le nombre de ligne de cette matrice.

Exemple(s) :

- (I.5) Soit $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y, z) = (2x - y + z, 3x + 2y - 3z)$
- a) Écrire la matrice de f dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$.
 - b) Soient $u_1 = (0, 1, 1)$, $u_2 = (1, 0, 1)$, $u_3 = (1, 1, 0)$, $v_1 = (1, 1)$ et $v_2 = (1, -1)$. Écrire la matrice de f dans les bases $\mathcal{B}_3 = (u_1, u_2, u_3)$ et $\mathcal{B}_2 = (v_1, v_2)$.
- (I.6) Soit f l'application qui à un polynôme $P \in \mathbb{R}_3[X]$ associe le reste de la division euclidienne de $X^2 P'$ par $X^4 - 1$.
- a) Vérifier que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.
 - b) Justifier que $\mathcal{B} = (X, X + 1, X^3, (X + 1)^2)$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.
 - c) Écrire la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.

Définition : Produit matriciel

Soient $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B = (b_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q}} \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. Le produit de A et B est la matrice $C = AB$ telle que $C = (c_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq q}} \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$ avec

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, q \rrbracket, c_{i,j} = \sum_{k=1}^p a_{i,k} b_{k,j}$$

Exemple(s) :

- (I.7) Si $(E_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$ est la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ alors $E_{i,j} E_{k,l} = \delta_{j,k} E_{i,l}$.
- (I.8) Trouver les matrices $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ telles que $\forall M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K}), AMB = 0$.

Définition : Matrice d'une famille de vecteurs

Soient E un espace vectoriel de dimension finie, $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $x_1, \dots, x_p$ des vecteurs de E . La **matrice des vecteurs** $x_1, \dots, x_p$ dans la base $\mathcal{B}$ est définie par $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_p) = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ où

$$\forall j \in \llbracket 1, p \rrbracket, x_j = \sum_{i=1}^n a_{i,j} e_i$$

Cela signifie que la $j^{\text{ème}}$ colonne contient les coordonnées du vecteur x_j dans la base $\mathcal{B}$.

Remarque(s) :

(I.9) On a donc $\text{Mat}_{\mathcal{B}_E \rightarrow \mathcal{B}_F}(f) = \text{Mat}_{\mathcal{B}_F}(f(e_1), \dots, f(e_p))$.

(I.10) Dans le cas particulier d'un seul vecteur $x \in E$, $X = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$ est un vecteur colonne qui contient les coordonnées du vecteur x dans la base $\mathcal{B}$.

Propriété [I.3] : Soient E et F deux espaces vectoriels de dimensions finies, $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$ des bases de E et F respectivement, $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $x \in E$. Si on pose $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}_E \rightarrow \mathcal{B}_F}(f)$, $X = \text{Mat}_{\mathcal{B}_E}(x)$ et $Y = \text{Mat}_{\mathcal{B}_F}(f(x))$ alors on a

$$Y = AX$$

Exemple(s) :

(I.11) Soient $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A .

Déterminer une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Définition : Matrice de passage

Si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ sont deux bases de E , la **matrice de passage** de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est la matrice

$$P(\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}') = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(e'_1, \dots, e'_n)$$

La $j^{\text{ème}}$ colonne de $P(\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}')$ contient donc les coordonnées du vecteur e'_j dans la base $\mathcal{B}$.

Propriété [I.4] : Changements de base

1. (**Coordonnées d'un vecteur**) : si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux bases de E , $P = P(\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}')$, $x \in E$, $X = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$ et $X' = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(x)$ les vecteurs colonnes des coordonnées de x dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ alors

$$X = PX'$$

2. (**Application linéaire**) : si $u \in \mathcal{L}(E, F)$, $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}'_E$ deux bases de E , $P = P(\mathcal{B}_E \rightarrow \mathcal{B}'_E)$, $\mathcal{B}_F$ et $\mathcal{B}'_F$ deux bases de F , $Q = P(\mathcal{B}_F \rightarrow \mathcal{B}'_F)$, $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}_E \rightarrow \mathcal{B}_F}(u)$ et $A' = \text{Mat}_{\mathcal{B}'_E \rightarrow \mathcal{B}'_F}(u)$ alors

$$A = QA'P^{-1}$$

Exemple(s) :

(I.12) Écrire le lien existant entre les deux matrices de f dans l'exercice précédent.

Propriété [I.5] :

1. Soient E et F deux espaces vectoriels de dimensions finies et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Si $(x_1, \dots, x_n)$ est une famille génératrice de E alors

$$\text{Im}(f) = \text{Vect}\{f(x_1), \dots, f(x_n)\}$$

2. Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ alors

$$\text{Im}(A) = \text{Vect}\{C_1, \dots, C_p\}$$

où C_j sont les colonnes de A .

Exemple(s) :

(I.13) Déterminer une base de $\text{Im}(A)$ où $A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 2 & 5 \\ -2 & 1 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

(I.14) Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Montrer que $\text{rg}(A) = 1$ si et seulement si il existe deux matrices colonnes $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $Y \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ non nulles telles que $A = XY^T$.

II Produit et somme de sous-espaces vectoriels

1. Produit de sous-espaces vectoriels

Définition [II.1] : Soient $E_1, \dots, E_p$ des espaces vectoriels sur le même corps $\mathbb{K}$ et $E = \prod_{i=1}^p E_i$. On définit une loi de composition interne sur E notée $+$ par

$$(x_1, x_2, \dots, x_p) + (y_1, y_2, \dots, y_p) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_p + y_p)$$

et une loi de composition externe par

$$\lambda.(x_1, x_2, \dots, x_p) = (\lambda.x_1, \lambda.x_2, \dots, \lambda.x_p)$$

L'ensemble E , muni de ces deux lois, est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel appelé **espace produit** de $E_1, E_2, \dots, E_p$.

Remarque(s) :

(II.1) Le vecteur nul de E est alors $0_E = (0_{E_1}, 0_{E_2}, \dots, 0_{E_p})$.

(II.2) On retrouve ainsi la structure d'espace vectoriel de $\mathbb{K}^p$.

Propriété [II.2] : Si $E_1, \dots, E_p$ sont des $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimensions finies alors l'espace produit $\prod_{i=1}^p E_i$ est de dimension finie et

$$\dim \left(\prod_{i=1}^p E_i \right) = \sum_{i=1}^p \dim(E_i)$$

Remarque(s) :

(II.3) On retrouve ainsi $\dim(\mathbb{K}^p) = p$.

(II.4) Si $(e_{i,k})_{1 \leq k \leq n_i}$ est une base de E_i alors une base de $E = \prod_{i=1}^p E_i$ est $(u_j)_{1 \leq j \leq n}$ avec $n = n_1 + \dots + n_p$ et $u_j = (\underbrace{0, \dots, 0}_{i-1 \text{ coord}}, \underbrace{e_{i,j-(n_1+\dots+n_{i-1})}}_{i^{\text{ème}} \text{ coord}}, \underbrace{0, \dots, 0}_{p-i \text{ coord}})$ si $n_1 + \dots + n_{i-1} < j \leq n_1 + \dots + n_{i-1} + n_i$ ($1 \leq i \leq p$).

2. Sous-espaces supplémentaires

Définition : Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E , on dit que F et G sont supplémentaires (dans E) si

$$F \cap G = \{0\} \text{ et } E = F + G$$

On le note $E = F \oplus G$

Propriété [II.3] :

1. Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E alors $E = F \oplus G$ si et seulement si

$$\forall x \in E, \exists!(y, z) \in F \times G, x = y + z$$

2. Si E est un espace vectoriel de dimension finie et F et G deux sous-espaces vectoriels de E alors les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

- i. $E = F \oplus G$
- ii. $F \cap G = \{0\}$ et $\dim E = \dim F + \dim G$.
- iii. $F + G = E$ et $\dim E = \dim F + \dim G$.

Exemple(s) :

(II.5) Trouver des supplémentaires des sous-espaces suivants

- a) $H_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x - y + 2z = 0\}$
- b) $H_2 = \{P \in \mathbb{R}_4[X], P(0) = P(1) = P(-1) = 0\}$
- c) $H_3 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}, (a, b) \in \mathbb{K}^2 \right\}$

(II.6) Si $p \in \mathcal{L}(E)$ vérifie $p \circ p = p$ alors $E = \ker(p) \oplus \text{Im}(p)$.

(II.7) $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ (matrices symétriques et antisymétriques)

(II.8) Si $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\deg(P) = n + 1$ alors $\mathbb{K}[X] = \mathbb{K}_n[X] \oplus P\mathbb{K}[X]$

(II.9) Soient E un espace vectoriel de dimension finie n et $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer qu'il existe $p \leq n$ tel que $E = \ker(f^p) \oplus \text{Im}(f^p)$ et étudier les endomorphismes induits par f sur ces deux sous-espaces.

Matrices par blocs :

si $E = E_1 \oplus E_2$ et $F = F_1 \oplus F_2$, $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ une base adaptée à la décomposition de E et $\mathcal{B}' = (\mathcal{B}'_1, \mathcal{B}'_2)$ une base adaptée à la décomposition de F .

Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$, on a $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$ avec $A_{ij} \in \mathcal{M}_{n_i, p_j}(\mathbb{K})$ si $p_j = \dim(E_j)$ et $n_i = \dim(F_i)$.

Si on note π_1 (resp. π_2) le projecteur sur F_1 parallèlement à F_2 (resp. sur F_2 parallèlement à F_1), alors

A_{ij} est la matrice de l'application $f_{ij} : \begin{matrix} E_j & \rightarrow & F_i \\ x & \mapsto & \pi_i(f(x)) \end{matrix}$.

Produit de matrices par blocs : si $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$ avec $A_{ij} \in \mathcal{M}_{n_i p_j}(\mathbb{K})$ et $B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$ avec

$B_{jk} \in \mathcal{M}_{p_j q_k}(\mathbb{K})$ alors on a $AB = \begin{pmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{pmatrix}$

Opérations élémentaires sur les matrices :

On définit les matrices élémentaires de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de la façon suivante :

- Pour $i \neq j$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, $T_{i,j}(\lambda) = I_n + \lambda E_{i,j}$ d'inverse $T_{i,j}(-\lambda)$ (matrice de transvection)
- Pour $\lambda \in \mathbb{K}^*$, $D_i(\lambda) = I_n + (\lambda - 1)E_{i,i}$ d'inverse $D_i(1/\lambda)$ (matrice de dilatation)
- Pour $i \neq j$, $P_{i,j} = I_n - (E_{i,i} + E_{j,j}) + (E_{i,j} + E_{j,i})$ d'inverse $P_{i,j}$ (matrice de transposition)

La multiplication d'une matrice A à gauche (resp. à droite) par une de ces matrices a un effet sur les lignes (resp. les colonnes) de A :

matrice $M =$	$T_{i,j}(\lambda)$	$D_i(\lambda)$	$P_{i,j}$
effet du produit par M à gauche sur les lignes de A	$L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$	$L_i \leftarrow \lambda L_i$	$L_i \leftrightarrow L_j$
effet du produit par M à droite sur les colonnes de A	$C_j \leftarrow C_j + \lambda C_i$	$C_i \leftarrow \lambda C_i$	$C_i \leftrightarrow C_j$

Exemple(s) :

(II.10) On peut faire de même des « opérations par blocs » :

si A est inversible, montrer que $\operatorname{rg} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \operatorname{rg}(A) + \operatorname{rg}(D - CA^{-1}B)$

3. Somme directe de p sous-espaces vectoriels

Définition : Soient $E_1, \dots, E_p$ p sous-espaces vectoriels de E . On note $E_1 + \dots + E_p = \sum_{k=1}^p E_k$ la **somme** des sous-espaces $E_1, \dots, E_p$ définie par

$$\sum_{k=1}^p E_k = \{x \in E, \exists (x_1, \dots, x_p) \in E_1 \times \dots \times E_p, x = x_1 + \dots + x_p\}$$

Remarque(s) :

(II.11) $\sum_{k=1}^p E_k = \operatorname{Vect} \left(\bigcup_{k=1}^p E_k \right)$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E (pour l'inclusion) contenant tous les E_k .

Définition : Si $E_1, \dots, E_p$ sont p sous-espaces vectoriels de E tels que

$$\forall (x_1, \dots, x_p) \in E_1 \times \dots \times E_p, x_1 + \dots + x_p = 0 \Rightarrow x_1 = \dots = x_p = 0$$

on dit que la somme de E_k est **directe** ; on la note alors $E_1 \oplus \dots \oplus E_p = \bigoplus_{k=1}^p E_k$

Attention : La somme des E_k est directe n'est pas équivalente à $E_i \cap E_j = \{0\}$ pour $i \neq j$. c/ex : trois droites 2 à 2 distinctes de $\mathbb{R}^3$.

Exemple(s) :

(II.12) Soient $E_k = \{x \mapsto P(x)e^{kx}, P \in \mathbb{K}[X]\}$, pour $k = 0, 1, 2$. Montrer que E_0, E_1 et E_2 sont en somme directe.

Propriété [II.4] : Soient $E_1, \dots, E_p$ p sous-espaces vectoriels de E . Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

- la somme des E_k est directe.
- $\forall x \in \sum_{k=1}^p E_k, \exists! (x_1, \dots, x_p) \in \prod_{k=1}^p E_k, x = x_1 + \dots + x_p$

Exemple(s) :

(II.13) Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^3 = f$. Montrer que $E = \ker(f) \oplus \ker(f - id_E) \oplus \ker(f + id_E)$.

Propriété [II.5] : (bases, dimensions et sommes directes)

- Si $E_1, \dots, E_p$ sont p sous-espaces vectoriels de E de dimensions finies et en somme directe alors $F = \bigoplus_{k=1}^p E_k$ est de dimension finie et

$$\dim F = \sum_{k=1}^p \dim(E_k)$$

de plus, si $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_p$ sont des bases respectives de $E_1, \dots, E_p$ alors $(\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_p)$ est une base de F appelée **base adaptée à la décomposition**

2. Si E est de dimension finie et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E , si $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_p$ sont des parties de $\mathcal{B}$ (non vides) telles que $\mathcal{B} = \bigcup_{i=1}^p \mathcal{B}_i$ et $i \neq j \Rightarrow \mathcal{B}_i \cap \mathcal{B}_j = \emptyset$ et si on note $E_i = \text{Vect}(\mathcal{B}_i)$ alors $E = \bigoplus_{i=1}^p E_i$.
3. Soient $E_1, \dots, E_p$ des sous-espaces vectoriels de dimensions finies de E . Alors

$$\dim \left(\sum_{i=1}^p E_i \right) \leq \sum_{i=1}^p \dim(E_i)$$

4. Soient $E_1, \dots, E_p$ des sous-espaces vectoriels de E , espace de dimension finie. Alors on a équivalence de :

- i. $E = \bigoplus_{i=1}^p E_i$.
- ii. Les $(E_i)_{1 \leq i \leq p}$ sont en somme directe et $\dim(E) = \sum_{i=1}^p \dim(E_i)$.
- iii. $E = \sum_{i=1}^p E_i$ et $\dim(E) = \sum_{i=1}^p \dim(E_i)$.

Exemple(s) :

(II.14) Soient $E = \{P \in \mathbb{R}_3[X], P(0) = P(1) = P(2) = 0\}$, $F = \{P \in \mathbb{R}_3[X], P(1) = P(2) = P(3) = 0\}$ et $G = \{P \in \mathbb{R}_3[X], P(X) = P(-X)\}$. Montrer que $\mathbb{R}_3[X] = E \oplus F \oplus G$ et déterminer une base $\mathbb{R}_3[X]$ adaptée à cette décomposition.

(II.15) Soit E un espace vectoriel de dimension n , $(f_1, \dots, f_p) \in \mathcal{L}(E)^p$ tels que $f_1 + \dots + f_p = id_E$ et $\sum_{k=1}^p \text{rg}(f_i) \leq n$.

- a) Montrer que $E = \text{Im}(f_1) \oplus \dots \oplus \text{Im}(f_p)$.
- b) Montrer que $f_1, \dots, f_p$ sont des projecteurs et $i \neq j \Rightarrow f_i \circ f_j = 0$.

III Applications linéaires

1. Rang d'une application linéaire

Théorème [III.1] : (Théorème du rang – forme géométrique)

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Si S est un supplémentaire de $\ker(u)$ dans E alors u induit un isomorphisme de S sur $\text{Im}(u)$, ie

$$\begin{array}{ccc} \tilde{u} : S & \longrightarrow & \text{Im}(u) \\ x & \longmapsto & u(x) \end{array} \text{ est un isomorphisme.}$$

Conséquence [III.2] : (Théorème du rang)

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Si E est de dimension finie alors $\text{rg}(u)$ est fini et

$$\text{rg}(u) = \dim(E) - \dim(\ker(u))$$

Remarque(s) :

(III.1) Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ alors $\text{rg}(A) = p - \dim(\ker(A))$. C'est donc le nombre de colonnes de A qui intervient dans cette formule!

Exemple(s) :

(III.2) Étude du noyau puis de l'image d'une application linéaire : déterminer des bases du noyau puis

$$\text{de l'image de } f, \text{ canoniquement associé à } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

- (III.3) Étude de l'image puis du noyau : déterminer des bases de l'image puis du noyau de g , canoniquement associée à $B = \begin{pmatrix} -11 & 7 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 11 & 2 \\ 1 & 0 & 7 & 1 \end{pmatrix}$

Conséquence [III.3] : Soient E et F deux espaces vectoriels de dimensions finies égales et $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

- i. u est un isomorphisme.
- ii. u est injectif ($\ker(u) = \{0\}$)
- iii. u est surjectif ($\operatorname{rg}(u) = \dim(F)$)

Attention : C'est faux pour un endomorphisme en dimension quelconque. $c/ex : P \mapsto XP$ et $P \mapsto P'$ sur $\mathbb{K}[X]$.

Exemple(s) :

- (III.4) Soient E un espace vectoriel de dimension finie n et $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer qu'il existe $p \leq n$ tel que $E = \ker(f^p) \oplus \operatorname{Im}(f^p)$ et étudier les endomorphismes induits par f sur ces deux sous-espaces.

Propriété [III.4] : Soient E, F, G trois espaces vectoriels de dimensions finies, $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$.

1. $\operatorname{rg}(g \circ f) \leq \min(\operatorname{rg}(f), \operatorname{rg}(g))$
2. si f est un isomorphisme de E sur F alors $\operatorname{rg}(g \circ f) = \operatorname{rg}(g)$.
3. si g est un isomorphisme de F sur G alors $\operatorname{rg}(g \circ f) = \operatorname{rg}(f)$

Remarque(s) :

- (III.5) On a en fait utilisé $\ker(f) \subset \ker(g \circ f)$ et $\operatorname{Im}(g \circ f) \subset \operatorname{Im}(g)$

Exemple(s) :

- (III.6) Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $r \leq \min(n, p)$ et $J_r = \sum_{i=1}^r E_{i,i} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Montrer l'équivalence de

- i. $\operatorname{rg}(A) = r$.
- ii. il existe $(P, Q) \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K}) \times \mathcal{GL}_p(\mathbb{K})$ tel que $A = PJ_rQ^{-1}$.

2. Applications linéaires et sommes directes

Propriété [III.5] : Soient E et F deux espaces vectoriels, $E_1, \dots, E_p$ des sous-espaces vectoriels de E tels que $E = \bigoplus_{k=1}^p E_k$ et pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $u_i \in \mathcal{L}(E_i, F)$. Alors il existe une unique application linéaire $u \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que

$$\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, u|_{E_i} = u_i$$

Remarque(s) :

- (III.7) Si $\mathcal{B}_i$ est une base de E_i , $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_p)$ et $\mathcal{B}'$ une base de F alors $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(u) = (A_1 \dots A_p)$ où $A_i = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}_i, \mathcal{B}'}(u_i)$

$$\text{Si } x \in E \text{ et } X = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(x) = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_p \end{pmatrix} \text{ alors } \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}'}(u(x)) = AX = (A_1X_1 + \dots + A_pX_p).$$

Exemple(s) :

- (III.8) Soient $E_1, \dots, E_n$ des sous-espaces vectoriels de E tels que $E = \bigoplus_{k=1}^n E_k$. Pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note p_i l'endomorphisme de E tel que $p_i|_{E_i} = \operatorname{id}_{E_i}$ et $p_i|_{E_k} = 0$ si $i \neq k$. Alors p_i est le projecteur sur

E_i parallèlement à $\bigoplus_{j \neq i} E_j$.

De plus on a $\sum_{k=1}^n p_k = id_E$ et $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, i \neq j \Rightarrow p_i \circ p_j = 0$

3. Sous-espaces stables par un endomorphisme

Définition : Soient F un sous-espace vectoriel de E et $f \in \mathcal{L}(E)$. On dit que F est **stable par** f si $f(F) \subset F$, ie

$$\forall x \in F, f(x) \in F.$$

Dans ce cas, la restriction de f à F **induit** un endomorphisme de F défini par $\tilde{f} : \begin{cases} F & \rightarrow F \\ x & \mapsto f(x) \end{cases}$

Exemple(s) :

(III.9) Si E est un espace vectoriel de dimension finie et f un endomorphisme de E tel que toute droite de E est stable par f alors f est une homothétie.

Propriété [III.6] : Si u et v sont deux endomorphismes de E qui commutent ($u \circ v = v \circ u$) alors

$\ker(u)$ et $\text{Im}(u)$ sont stables par v .

Exemple(s) :

(III.10) Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ et p un projecteur de E . Montrer que $u \circ p = p \circ u$ si et seulement si $\ker(p)$ et $\text{Im}(p)$ sont stables par u .

Propriété [III.7] : Soient E un espace vectoriel de dimension finie, F un sous-espace vectoriel de E et $f \in \mathcal{L}(E)$. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E telle que $\mathcal{B}_F = (e_1, \dots, e_p)$ soit une base de F . On a équivalence de :

- i. F est stable par f
- ii. $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ est triangulaire par blocs.

$A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ est alors la matrice dans la base $\mathcal{B}_F$ de l'endomorphisme de F induit par f .

Conséquence [III.8] : Si $E = \bigoplus_{k=1}^p E_k$ et $f \in \mathcal{L}(E)$ alors tous les E_i sont stables par f si et seulement si $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est diagonale par blocs dans toute base $\mathcal{B}$ adaptée à la décomposition

Exemple(s) :

(III.11) Si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E et $u \in \mathcal{L}(E)$ alors $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est diagonale si et seulement si pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\text{Vect}\{e_i\}$ est stable par u .

(III.12) Avec les mêmes notations, $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est triangulaire supérieure si et seulement si pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\text{Vect}\{e_1, \dots, e_i\}$ est stable par u .

(III.13) Si A est triangulaire supérieure et inversible alors A^{-1} est aussi triangulaire supérieure.

4. Polynômes d'endomorphisme et de matrice carrée

Définition :

1. Soient E un espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}(E)$. Pour $k \in \mathbb{N}$, on pose $u^k = \begin{cases} id_E & \text{si } k = 0 \\ u \circ u^{k-1} & \text{si } k \geq 1 \end{cases}$

Si $P = \sum_{k=0}^d a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$, on définit l'endomorphisme $P(u)$ par

$$P(u) = \sum_{k=0}^d a_k u^k = a_d u^d + a_{d-1} u^{d-1} + \cdots + a_1 u + a_0 id_E$$

2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Pour $k \in \mathbb{N}$, on pose $A^k = \begin{cases} I_n & \text{si } k = 0 \\ A \times A^{k-1} & \text{si } k \geq 1 \end{cases}$

Si $P = \sum_{k=0}^d a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$, on définit la matrice $P(A)$ par

$$P(A) = \sum_{k=0}^d a_k A^k = a_d A^d + a_{d-1} A^{d-1} + \cdots + a_1 A + a_0 I_n$$

Attention :

- $P(u)$ n'a de sens que si u est un endomorphisme, $P(A)$ seulement si A est une matrice carrée.
- Ne pas oublier de rajouter id_E (ou I_n) : $u + 1$ n'a aucun sens si $u \in \mathcal{L}(E)$.

Propriété [III.9] : (Règles de calcul sur les polynômes d'endomorphisme et polynômes de matrice)

1. Soient E un espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}(E)$.

$$\begin{cases} \forall (P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2, \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2, (\alpha P + \beta Q)(u) = \alpha P(u) + \beta Q(u) \\ \forall (P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2, (PQ)(u) = P(u) \circ Q(u) \\ P(u) = id_E \text{ si } P = 1 \end{cases}$$

2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

$$\begin{cases} \forall (P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2, \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2, (\alpha P + \beta Q)(A) = \alpha P(A) + \beta Q(A) \\ \forall (P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2, (PQ)(A) = P(A) \times Q(A) \\ P(A) = I_n \text{ si } P = 1 \end{cases}$$

Attention : On $P(u)(x) \neq P(u(x))$: la notation $P(u(x))$ (ou $P(AX)$) n'a aucun sens !

Conséquence [III.10] :

- Pour $u \in \mathcal{L}(E)$, $\mathbb{K}[u] = \{v \in \mathcal{L}(E), \exists P \in \mathbb{K}[X], v = P(u)\}$ (l'ensemble des polynômes en u) est un sous-espace vectoriel, stable par composition, de $\mathcal{L}(E)$ sur lequel la composition est commutative.
En particulier $\forall P \in \mathbb{K}[X], P(u) \circ u = u \circ P(u)$.
- Pour tout polynôme P de $\mathbb{K}[X]$, $\ker(P(u))$ et $\text{Im}(P(u))$ sont des sous-espaces vectoriels de E stables par u .

Remarque(s) :

- (III.14) Soient E est un espace vectoriel de dimension finie, $\mathcal{B}$ une base de E , $u \in \mathcal{L}(E)$ et $P \in \mathbb{K}[X]$. Si $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ alors $P(A) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(P(u))$.
Inversement, si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et si u est l'endomorphisme canoniquement associé à A , alors $P(u)$ est l'endomorphisme canoniquement associé à $P(A)$.

Propriété [III.11] : Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles qu'il existe $Q \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ vérifiant $B = Q^{-1}AQ$. Alors pour tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$, on a

$$P(B) = Q^{-1}P(A)Q.$$

On en déduit en particulier que $P(A)$ et $P(B)$ sont elles aussi semblables.

Définition :

1. Soient E un espace vectoriel, $u \in \mathcal{L}(E)$ et $P \in \mathbb{K}[X]$. On dit que P est un **polynôme annulateur de u** si

$$P(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}.$$

2. Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $P \in \mathbb{K}[X]$. On dit que P est un **polynôme annulateur de A** si

$$P(A) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}.$$

Remarque(s) :

(III.15) Si P et Q sont deux polynômes annulateurs de A (ou de u) et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ alors $\alpha P + \beta Q$ est aussi un polynôme annulateur de A (ou de u).

Si R est un polynôme quelconque alors PR est annulateur de A (ou de u).

S'il existe un polynôme annulateur non nul de u , il n'est jamais unique !

(III.16) Il existe un polynôme annulateur de A de degré p si et seulement si la famille $(I_n, A, \dots, A^p)$ est liée.

Chercher un polynôme annulateur de A est donc équivalent à chercher une relation de liaison sur les puissances de A .

Propriété [III.12] :

1. Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. Il existe un polynôme annulateur non nul de u .
2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Il existe un polynôme annulateur non nul de A .

Exemple(s) :

(III.17) Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme annulateur non nul de A et $p = \deg(P)$. Alors $\mathbb{K}[A] = \text{Vect} \{I_n, A, \dots, A^{p-1}\}$

(III.18) Utilisation d'un polynôme annulateur pour calculer l'inverse d'une matrice (ou d'un endomorphisme) : si $P = a_0 + a_1X + \dots + a_pX^p$ est un polynôme annulateur de A tel que $a_0 = P(0) \neq 0$ alors A est inversible et A^{-1} est un polynôme en A .

Application à $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec $a_{i,j} = \begin{cases} \alpha & \text{si } i = j \\ \beta & \text{sinon} \end{cases}$

(III.19) Utilisation d'un polynôme annulateur pour calculer les puissances d'une matrice (ou d'un endomorphisme) : soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $P = X(X-1)(X-2)$ soit annulateur de A ; calculer A^p (pour $p \in \mathbb{N}$). Même question avec A annulée par $P = (X-1)^2(X-2)$.

(III.20) Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(I_2 + \frac{1}{n}A\right)^n$.

Remarque(s) :

(III.21) Si A est inversible, il existe des polynômes annulateurs de A qui s'annulent en 0; ex : $X^2 - X$ est annulateur de I_n .

(III.22) On peut utiliser un polynôme annulateur de A pour calculer $Q(A)$ avec Q un polynôme quelconque (et pas seulement $Q = X^p$).

IV Formes linéaires et hyperplans

1. Hyperplans dans un espace vectoriel de dimension finie

Définition : Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Une **forme linéaire** sur E est une application linéaire de E vers $\mathbb{K}$.

Remarque(s) :

(IV.1) Si E est un espace vectoriel de dimension finie p , f une forme linéaire sur E et $\mathcal{B}$ une base de E alors $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \in \mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{K})$ (matrice ligne).

Exemple(s) :

(IV.2) Soit e un vecteur non nul de E , espace vectoriel de dimension finie. Montrer qu'il existe une forme linéaire φ sur E telle que $\varphi(e) = 1$.

Définition [IV.1] : Soient E un espace vectoriel de dimension finie n et H un sous-espace vectoriel de E . On dit que H est un **hyperplan** de E s'il vérifie une des trois propriétés équivalentes (donc les trois) suivantes :

- i. Il existe une droite D de E telle que $E = H \oplus D$.
- ii. Il existe une forme linéaire non nulle φ sur E telle que $H = \ker(\varphi)$.
- iii. $\dim(H) = n - 1$

Exemple(s) :

(IV.3) Les hyperplans de $\mathbb{R}^2$ sont les droites ; les hyperplans de $\mathbb{R}^3$ sont les plans.

(IV.4) $\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x + y - 2z = 0\}$ est un hyperplan de $\mathbb{R}^4$.

(IV.5) $\{P \in \mathbb{K}_n[X], P(0) + P''(1) = 0\}$ est un hyperplan de $\mathbb{K}_n[X]$.

Propriété [IV.2] : Soient $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et H un hyperplan de E . Il existe $a_1, \dots, a_n$ des scalaires non tous nuls tels que

$$x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n \in H \text{ si et seulement si } a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = 0$$

L'équation $a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = 0$ est une **équation cartésienne de H dans la base $\mathcal{B}$** . Une telle équation est unique à une constante multiplicative près.

Remarque(s) :

(IV.6) On retrouve les équations cartésiennes des droites dans $\mathbb{R}^2$ et des plans dans $\mathbb{R}^3$.

(IV.7) On a en fait prouvé que si φ et ψ sont deux formes linéaires non nulles sur E alors $\ker(\varphi) = \ker(\psi)$ si et seulement si il existe $\lambda \neq 0$ tel que $\psi = \lambda\varphi$.

2. Trace d'une matrice carrée et d'un endomorphisme

Définition : Pour $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on définit sa **trace**, notée $\text{Tr}(A)$, par $\text{Tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{i,i}$.

Propriété [IV.3] :

1. Tr est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, ie $\forall(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2, \forall(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2, \text{Tr}(\alpha A + \beta B) = \alpha \text{Tr}(A) + \beta \text{Tr}(B)$
2. $\forall(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2, \text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$
3. $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \text{Tr}(A) = \text{Tr}(A^T)$

Attention : $\text{Tr}(AB) \neq \text{Tr}(A) \text{Tr}(B)$ et $\text{Tr}(ABC) = \text{Tr}(BCA) = \text{Tr}(CAB) \neq \text{Tr}(ACB)$; c/ex : $A = C^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Conséquence [IV.4] : Si A et B sont deux matrices semblables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ alors $\text{Tr}(A) = \text{Tr}(B)$.

Attention : La réciproque est fausse ; c/ex $A = I_2$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ne sont pas semblables.

Définition [IV.5] : Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. On appelle **trace** de f la trace de toute matrice de f dans une base de E : $\text{Tr}(f) = \text{Tr}(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f))$ pour toute base $\mathcal{B}$ de E .

Attention : La trace n'est définie que pour un endomorphisme en dimension finie : la trace de l'application linéaire $P \in \mathbb{R}_n[X] \mapsto (P(0), \dots, P(n)) \in \mathbb{R}^{n+1}$ n'existe pas.

Conséquence [IV.6] : Si f et g sont deux endomorphismes de E , espace vectoriel de dimension finie, alors on a :

1. $\text{Tr}(\alpha f + \beta g) = \alpha \text{Tr}(f) + \beta \text{Tr}(g)$ pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$.
2. $\text{Tr}(g \circ f) = \text{Tr}(f \circ g)$.

Exemple(s) :

(IV.8) Soient E un espace vectoriel de dimension finie et p un projecteur de E . Alors on a $\text{Tr}(p) = \text{rg}(p)$.

La réciproque est fausse ; c/ex : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est une matrice telle que $\text{Tr}(A) = \text{rg}(A)$ mais $A^2 \neq A$.

V Déterminants

1. Propriétés des déterminants

Définition :

1. Soient E un espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{B}$ une base de E . Le **déterminant dans la base $\mathcal{B}$** est l'unique application $\det_{\mathcal{B}} : E^n \rightarrow \mathbb{K}$ telle que
 - $\det_{\mathcal{B}}$ est linéaire par rapport à chacune de ses variables.
 - $\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) = 0$ s'il existe $i \neq j$ tels que $x_i = x_j$.
 - $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = 1$
2. **Déterminant d'une matrice carrée** : $\det$ est l'unique application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vers $\mathbb{K}$ telle que
 - $(C_1, \dots, C_n) \mapsto \det(C_1, \dots, C_n)$ est linéaire par rapport à chacune des colonnes C_j .
 - $\det(C_1, \dots, C_n) = 0$ s'il existe $i \neq j$ tels que $C_i = C_j$.
 - $\det(I_n) = 1$.

Propriété [V.1] :

1. $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \forall \lambda \in \mathbb{K}, \det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$.
2. $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2, \det(AB) = \det(A) \times \det(B)$.
3. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On a $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ si et seulement si $\det(A) \neq 0$.
Si A est inversible alors $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$.
4. $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \det(A^T) = \det(A)$.

Attention : Pour $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$, on a $\det(AB) = \det(BA)$. Ce résultat n'est pas valable pour $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$.

Conséquence [V.2] : Soient E un espace vectoriel de dimension finie n , $(u_1, \dots, u_n) \in E^n$ et $\mathcal{B}$ est une base de E quelconque. Alors

$$(u_1, \dots, u_n) \text{ est une base de } E \text{ si et seulement si } \det_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n) \neq 0,$$

Définition [V.3] : Soient E un espace vectoriel de dimension finie, $\mathcal{B}$ une base de E et $f \in \mathcal{L}(E)$, le **déterminant** de f , noté $\det(f)$ est défini par

$$\det(f) = \det(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f))$$

Ce scalaire est indépendant de la base $\mathcal{B}$ de E .

Exemple(s) :

(V.1) Si F et G sont deux espaces supplémentaires de E , espace vectoriel de dimension finie, et s la symétrie par rapport à F parallèlement à G alors $\det(s) = (-1)^{\dim(G)}$.

Attention : Le déterminant n'est défini que pour un endomorphisme en dimension finie : l'application linéaire $P \in \mathbb{R}_n[X] \mapsto (P(0), \dots, P(n)) \in \mathbb{R}^{n+1}$ n'a pas de déterminant.

Propriété [V.4] : Soit E un espace vectoriel de dimension finie n .

1. $\forall f \in \mathcal{L}(E), \forall \lambda \in \mathbb{K}, \det(\lambda f) = \lambda^n \det(f)$
2. $\forall (f, g) \in \mathcal{L}(E)^2, \det(f \circ g) = \det(f) \times \det(g)$.
3. $\forall f \in \mathcal{L}(E), \det(f) \neq 0 \Leftrightarrow f \in \mathcal{GL}(E)$ et si $f \in \mathcal{GL}(E), \det(f^{-1}) = \frac{1}{\det(f)}$

Attention : On a en particulier $\det(f \circ g) = \det(g \circ f)$ si f et g sont deux endomorphismes de E ; ce n'est pas valable pour $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, E)$.

2. Calculs de déterminants

Rappels : $\diamond$ Un déterminant est nul si et seulement si ses lignes (ou colonnes) sont liées.

- $\diamond$ Si on échange deux lignes (ou deux colonnes) d'un déterminant, on le multiplie par -1 .
- $\diamond$ On ne change pas la valeur d'un déterminant en ajoutant à une ligne (resp. une colonne) une combinaison linéaire des autres lignes (resp. colonnes).
- $\diamond$ Si on multiplie une ligne (ou une colonne) d'un déterminant par $\lambda \in \mathbb{K}$, on multiplie le déterminant par λ .

Propriété [V.5] : Soient $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $(h, k) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$. Pour $(p, q) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, on note $\Delta_{p,q}$, le déterminant de la matrice extraite de A en supprimant la $p^{\text{ème}}$ ligne et la $q^{\text{ème}}$ colonne :

$$\Delta_{p,q} = \det(a_{i,j})_{\substack{1 \leq i,j \leq n \\ i \neq p \text{ et } j \neq q}}$$

1. (Développement suivant la $h^{\text{ème}}$ ligne) : $\det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{h+j} a_{h,j} \Delta_{h,j}$
2. (Développement suivant la $k^{\text{ème}}$ colonne) : $\det(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+k} a_{i,k} \Delta_{i,k}$

Conséquence [V.6] : Si $A = (a_{i,k})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est triangulaire alors $\det(A) = \prod_{i=1}^n a_{i,i}$

Propriété [V.7] : (Déterminant de Vandermonde)

Soit $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$. On a

$$\det (x_i^{j-1})_{1 \leq i, j \leq n} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$$

Propriété [V.8] : (Interpolation de Lagrange)

Soient $n + 1$ scalaires 2 à 2 distincts, $a_0, \dots, a_n$. Alors

1. L'application $\varphi : P(X) \in \mathbb{K}_n[X] \mapsto (P(a_0), \dots, P(a_n))$ est un isomorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$ sur $\mathbb{K}^{n+1}$.
2. Si $(y_0, \dots, y_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$, alors il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{K}_n[X]$ tel que $\forall i \in \llbracket 0, n+1 \rrbracket, P(a_i) = y_i$.
3. Si on définit $L_k(X) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^n \frac{X - a_j}{a_k - a_j}$, pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, la famille $\mathcal{B}_L = (L_0, \dots, L_n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$ appelée

famille des polynômes interpolateurs de Lagrange aux points $a_0, \dots, a_n$.

De plus $L_k(a_i) = \delta_{i,k} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

4. Pour tout $P \in \mathbb{K}_n[X]$, on a

$$P(X) = \sum_{k=0}^n P(a_k) L_k(X)$$

ie les coordonnées de P dans la base $\mathcal{B}_L$ sont $(P(a_0), \dots, P(a_n))$

5. On a en particulier $1 = \sum_{k=0}^n L_k(X)$
6. L'unique polynôme de $\mathbb{K}_n[X]$ tel que $\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, P(a_i) = y_i$ est $P(X) = \sum_{i=0}^n y_i L_i(X)$.

Remarque(s) :

- (V.2) Lien entre l'interpolation de Lagrange et les déterminants de Vandermonde : si $\alpha_0, \dots, \alpha_n$ sont $n + 1$ scalaires deux à deux distincts, le déterminant du système $\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket P(\alpha_i) = y_i$ où les inconnues sont les $n + 1$ coefficients du polynôme $P \in \mathbb{K}_n[X]$ est un déterminant de Vandermonde

Exemple(s) :

- (V.3) Soient $a_0, \dots, a_n$ des réels et $P_k = (X + a_k)^n$. Montrer que $(P_0, \dots, P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ si et seulement si les a_i sont deux à deux distincts.

Propriété [V.9] : (Matrices triangulaires par blocs)

Soient $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ (carrée), $C \in \mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{K})$ (carrée) et $B \in \mathcal{M}_{p, n-p}(\mathbb{K})$. Alors on a

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} = \det(A) \times \det(C)$$

Remarque(s) :

- (V.4) On aussi $\det \begin{pmatrix} A & 0 \\ B & C \end{pmatrix} = \det(A) \times \det(C)$ si A et C sont carrées.