

1. Calcul d'une intégrale

Le but de cette question est de calculer $I = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^4}$.

- a) Justifier la convergence de $I = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^4}$ et $J = \int_0^{+\infty} \frac{t dt}{1+t^4}$.

Calculer J ; on pourra remarquer que $1+t^4 = 1+(t^2)^2$.

- b) Montrer par un changement de variable que $I = \int_0^{+\infty} \frac{t^2 dt}{1+t^4}$.
- c) Factoriser le polynôme $1+X^4$ en produit de facteurs irréductibles sur $\mathbb{R}[X]$.
- d) Calculer $I - J\sqrt{2} + I$ et en déduire la valeur de I .

2. Étude d'une fonction

Dans cette partie, on s'intéresse à F , définie par

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-(t^2+i)x^2}}{t^2+i} dt$$

- a) Montrer que $F(x)$ existe pour tout réel x .

Dans la suite, on admettra que F est continue sur $\mathbb{R}^+$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et que

$$\forall x > 0, F'(x) = -2x \int_0^{+\infty} e^{-(t^2+i)x^2} dt$$

Les 5/2 peuvent démontrer ces résultats.

- b) En admettant $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, montrer que $F'(x) = -\sqrt{\pi}e^{-ix^2}$ pour $x > 0$.
- c) Justifier que $\forall x > 0, |F(x)| \leq \frac{\sqrt{\pi}}{2x}$ et en déduire la limite de F en $+\infty$.

3. Les intégrales de Fresnel

- a) Déduire de ce qui précède que $\int_0^{+\infty} e^{-ix^2} dx$ converge et que $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+i} = \sqrt{\pi} \int_0^{+\infty} e^{-ix^2} dx$.
- b) Déterminer la valeur de $\int_0^{+\infty} e^{-ix^2} dx$.
- c) Que valent $\int_0^{+\infty} \cos(t^2) dt$ et $\int_0^{+\infty} \sin(t^2) dt$?