

Correction du DM1

1. a) Les deux fonctions $t \mapsto \frac{1}{1+t^4}$ et $t \mapsto \frac{t}{1+t^4}$ sont $\mathcal{CM}^0$ sur $[0, +\infty[$, de plus $\frac{1}{1+t^4} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{t^4}$ et $\frac{t}{1+t^4} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{t^3}$ donc $t \mapsto \frac{1}{1+t^4}$ et $t \mapsto \frac{t}{1+t^4}$ sont intégrables sur $\mathbb{R}^+$ et I et J existent
On a $J = \left[\frac{1}{2} \arctan(t^2) \right]_0^{+\infty}$ donc $J = \frac{\pi}{4}$
 - b) On pose $u = \frac{1}{t}$: la fonction $u \mapsto \frac{1}{u}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ strictement décroissante et bijective de $\mathbb{R}^{+*}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ donc
 $I = \int_{+\infty}^0 \frac{-1/u^2}{1+1/u^4} du$ donc $I = \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{1+t^4} dt$
 - c) $X^4 + 1 = (X^2 + 1)^2 - 2X^2 = (X^2 + X\sqrt{2} + 1)(X^2 - X\sqrt{2} + 1)$ les deux polynômes sont sans racines réelles donc irréductibles sur $\mathbb{R}$.
Comme $1 + X^4$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, on pouvait dès le début dire que sa décomposition comporte deux facteurs de degré 2 sans racines réelles.
 - d) $I - J\sqrt{2} + I = \int_0^{+\infty} \frac{1 - t\sqrt{2} + t^2}{1+t^4} dt = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t\sqrt{2}+t^2} = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\left(t + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{1}{2}} = 2 \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+(1+t\sqrt{2})^2}$
donc $2I - J\sqrt{2} = \left[\sqrt{2} \arctan(1+t\sqrt{2}) \right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$. On en déduit $I = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$
2. a) Pour $x \geq 0$ fixé, la fonction $t \mapsto \frac{e^{-(t^2+i)x^2}}{t^2+i}$ est $\mathcal{CM}^0$ sur $[0, +\infty[$ et $\left| \frac{e^{-(t^2+i)x^2}}{t^2+i} \right| \leq \frac{1}{|t^2+i|} = \frac{1}{\sqrt{t^4+1}} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{t^2}$
donc $t \mapsto \frac{e^{-(t^2+i)x^2}}{t^2+i}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ si $x \geq 0$
 - b) On a, pour $x > 0$, $F'(x) = -2xe^{-ix^2} \int_0^{+\infty} e^{-t^2x^2} dt$. On pose $u = xt$: la fonction $u \mapsto \frac{t}{x}$ est $\mathcal{C}^1$ strictement croissante et bijective de $\mathbb{R}^+$ sur $\mathbb{R}^+$ donc $\int_0^{+\infty} e^{-t^2x^2} dt = \int_0^{+\infty} e^{-u^2} \frac{du}{x}$, puis $F'(x) = -\sqrt{\pi}e^{-ix^2}$ pour $x > 0$
 - c) Pour $x > 0$ et $t > 0$, on a $\left| \frac{e^{-(t^2+i)x^2}}{t^2+i} \right| = \frac{e^{-t^2x^2}}{\sqrt{1+t^4}} \leq e^{-t^2x^2}$. La fonction $t \mapsto e^{-t^2x^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ pour $x > 0$ (vu à la question précédente ou bien $\mathcal{CM}^0$ sur $[0, +\infty[$ et $o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ en $+\infty$ si $x > 0$). On a donc
 $|F(x)| \leq \int_0^{+\infty} e^{-t^2x^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2x}$. On en déduit $\lim_{+\infty} F = 0$
3. a) La fonction F' est $\mathcal{C}^0$ sur $]0, +\infty[$ et une de ses primitives, la fonction F , admet des limites finies en 0 et $+\infty$ donc $\int_0^{+\infty} F'(t) dt$ converge. On a donc $\lim_{+\infty} F - F(0) = \int_0^{+\infty} F'(t) dt$ ie $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2+i} = \sqrt{\pi} \int_0^{+\infty} e^{-ix^2} dx$
 - b) On a $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2+i} = \int_0^{+\infty} \frac{t^2-i}{1+t^4} dt = \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{1+t^4} - i \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^4} = I(1-i)$. Avec la valeur de I , on en déduit $\int_0^{+\infty} e^{-ix^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}(1-i)$
 - c) En identifiant partie réelle et partie imaginaire, on justifie la convergence des deux intégrales de Fresnel et leur valeur : $\int_0^{+\infty} \cos(t^2) dt = \int_0^{+\infty} \sin(t^2) dt = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$

Ceci constitue donc un nouvel exemple de fonction qui ne tend pas vers 0 en $+\infty$ mais dont l'intégrale est convergente.