

TD3 : Intégration

Exercice 1

1. Montrer la convergence de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t(1+t)^2} dt$
2. La fonction $t \mapsto \frac{\operatorname{ch}(\sqrt{t}) \ln t}{\sqrt{t} + \cos t}$ est-elle intégrable sur $]0, 1]$?
3. L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t^2 - 1)}{(1+t)^2} dt$ est-elle convergente ?
4. Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$
 - a) On suppose $\beta > 0$. Déterminer la nature de $\int_1^{+\infty} t^\alpha e^{-t^\beta} dt$.
 - b) Toujours avec $\beta > 0$, déterminer la nature de $\int_0^1 t^\alpha e^{-t^\beta} dt$.En déduire la nature de $\int_0^{+\infty} t^\alpha e^{-t^\beta} dt$ en fonction de $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta > 0$.
- c) Étudier la nature de $\int_0^{+\infty} t^\alpha e^{-t^\beta} dt$ dans les cas $\beta < 0$ et $\beta = 0$.

Exercice 2 (CCP PSI 2010)

Déterminer la limite en 0 de $tf(t)$ où $f(t) = \exp\left(\frac{1}{\sqrt{t}} + \ln t \frac{\sin t}{t}\right)$. La fonction f est-elle intégrable sur $]0, 1]$?

Exercice 3

Soit f continue par morceaux sur $\mathbb{R}^+$ telle que $t \mapsto f(t)e^{-\alpha t}$ soit intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x > \alpha$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^n f(t) e^{-xt} dt$ est convergente. (*)

Exercice 4 (CCP PSI 2018)

1. Montrer que $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^3 t}{t^2} dt$ existe.
2. Montrer que $I = \frac{3}{4} \lim_{x \rightarrow 0} \int_x^{3x} \frac{\sin t}{t^2} dt$. (*)
3. Déterminer la valeur de I . (*)

Exercice 5

Soit f continue sur $\mathbb{R}^+$ telle que f^2 est intégrable sur $\mathbb{R}^+$. Pour $x > 0$, $g(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt$.

1. Montrer que g est prolongeable par continuité en 0. (*)
2. Montrer que, pour $x > 0$, $\int_0^x g(t)^2 dt = 2 \int_0^x f(t)g(t) dt - xg(x)^2$.
3. En déduire que g^2 est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ et $\int_0^{+\infty} g(t)^2 dt \leq 4 \int_0^{+\infty} f(t)^2 dt$

Indications

Exercice 3

1. Pour appliquer le théorème de comparaison, on dispose, dans cet exercice, d'une fonction supplémentaire par rapport à celles vues en cours.

Exercice 4

2. Commencer par $I = \lim_{x \rightarrow 0} \int_x^{3x} \frac{\sin^3 t}{t^2} dt$ et linéariser $\sin^3 t$
3. Introduire $\int_x^{3x} \frac{dt}{t}$ pour « compenser » $\frac{\sin t}{t}$ au voisinage de 0.

Exercice 5

1. Introduire $F : x \mapsto \int_0^x f(t) dt$.
3. Utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour les intégrales.