

Exercice 1

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Montrer que $\mathbb{R}^3 = \ker(A) \oplus \ker(A - 2I_3) \oplus \ker(A + 2I_3)$.

Exercice 2 (CCINP PSI 2022)

Soient E un espace vectoriel de dimension $n \geq 2$ et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^{p-1} \neq 0$ et $f^p = 0$ pour un entier $p \geq 1$.

1. Existe-t-il $k \leq p$ tel que $f^k = 0$?
2. Montrer qu'il existe un vecteur $x_0 \in E$ tel que $(x_0, f(x_0), \dots, f^{p-1}(x_0))$ soit libre. En déduire $p \leq n$. (*)
Que vaut f^n ?
3. On suppose qu'il existe $g \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f = g^2$, montrer que $2p - 1 \leq n$

Exercice 3 (Mines-Télécom PSI 2025)

Soient E un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension 3, $\mathcal{B}$ une base de E et $u \in \mathcal{L}(E)$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ et

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer $\text{rg}(A - 2I_3)$.
2. Déterminer une base de $E_2(u) = \ker(u - 2id)$ et de $F = \ker[(u - id)^2]$ et montrer que ces espaces sont supplémentaires.
3. Soit $v \in \mathcal{L}(E)$ pour lequel il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $u = v^n$. Montrer que u et v commutent et en déduire que $E_2(u)$ et F sont stables par v .
4. Déterminer v . (*)

Exercice 4 (Mines-Télécom PSI 2024)

Soient E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u \neq id_E$ et $u^3 = id_E$

1. Soient $E_1 = \ker(u - id_E)$ et $E_2 = \ker(u^2 + u + id_E)$. Montrer que $E_1 \cap E_2 = \{0\}$
2. Calculer $(u^2 + u + id_E) - (u - id_E) \circ (u + 2id_E)$ et en déduire $E = E_1 \oplus E_2$
3. Justifier que, si $\dim(E)$ est impaire, alors $E_1 \neq \{0\}$ et $E_2 \neq \{0\}$. (*)

Exercice 5

Soit f un endomorphisme non nul et non bijectif de E , espace vectoriel de dimension finie. Montrer que l'équivalence de :

- i) $\ker(f) = \ker(f^2)$
- ii) $E = \ker(f) \oplus \text{Im}(f)$
- iii) Il existe une base $\mathcal{B}$ et une matrice U inversible telle que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & U \end{pmatrix}$

Exercice 6 (Mines-Télécom PSI 2017)

Soient $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, E)$.

1. Montrer que $\text{Im}(f) = \text{Im}(f \circ g)$ si et seulement si $E = \text{Im}(g) + \ker(f)$. (*)
2. Montrer que $\ker(f) = \ker(g \circ f)$ si et seulement si $\text{Im}(f) \cap \ker(g) = \{0\}$.

Indications

Exercice 2

2. Dans une famille libre, aucun vecteur ne doit être nul. Il faut commencer par expliquer le choix de x_0 avant de prouver la liberté de la famille.

Exercice 3

4. On peut aussi vérifier que $\ker(u - id)$ est stable par v .

Exercice 4

3. Si $E_1 = \{0\}$, vérifier $\left(u + \frac{1}{2}id\right)^2 = -\frac{3}{4}id$ et utiliser le déterminant.

Exercice 6

1. Pour le sens direct, faire une analyse/synthèse.