

TD5 : Algèbre linéaire

Exercice 1 (CCINP PSI 2025)

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 - 3f + 2id_E = 0$.

1. Montrer que f est un automorphisme de E .
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe x_n, y_n tels que $f^n = x_n f + y_n id_E$.
3. Déterminer x_n et y_n . La relation est-elle aussi valable pour $n \in \mathbb{Z}$?

Exercice 2 (CCP PSI 2017)

1. Montrer qu'il n'existe pas de polynôme annulateur non nul de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ de degré ≤ 2 .
2. Trouver un polynôme annulateur de A et en déduire A^{-1} .
3. Quels sont tous les polynômes annulateurs de A ? (*)

Exercice 3 (Mines-Télécom PSI 2018)

Soient E un espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$.

1. Montrer que si $\exists n \in \mathbb{N}^*, f^n = id$ alors $f \in \mathcal{GL}(E)$.
2. Montrer que si $\exists n \in \mathbb{N}^*, f^n = 0$ alors $id - f \in \mathcal{GL}(E)$.

Exercice 4 (Mines-Ponts PSI 2014)

Soit u un endomorphisme de E , espace vectoriel de dimension finie. Montrer que $E = \ker(u) \oplus \text{Im}(u)$ si et seulement si u possède un polynôme annulateur P tel que $P(0) = 0$ et $P'(0) \neq 0$. (*)

Exercice 5 (Mines-Ponts PSI 2021)

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E , espace de dimension finie.

1. Montrer qu'il existe $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\ker(u) = G$ et $\text{Im}(u) = F$ si et seulement si $\dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$. (*)
2. Trouver un tel endomorphisme u lorsque $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + y + z = 0\}$ et $G = \text{Vect}\{(1, -1, 0)\}$

Exercice 6 (Centrale PC 2014)

Soient $f_1, \dots, f_n$ des endomorphismes nilpotents de E , espace vectoriel de dimension n , qui commutent 2 à 2. Montrer que si $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ alors $\text{rg}(f_1 \circ \dots \circ f_k) \leq n - k$. (*)

Que peut-on en déduire ?

Indications

Exercice 2

3. En supposant que $Q(A) = 0$, écrire la division euclidienne de Q par P (le polynôme de Q^2) puis vérifier que P divise Q .

Exercice 4

Pour le sens direct, commencer par justifier l'existence d'un polynôme annulateur P non nul puis « ajuster » son terme de plus bas degré selon que $P(0) = 0$ ou non (et dans ce deuxième cas, vérifier que $\ker(u) = \ker(u^k)$ pour $k \geq 1$ pour « simplifier » P par X^{k-1}).

En cas de difficulté pour le sens réciproque, commencer par un cas particulier, en prenant $P = 2X - X^3 + 4X^4$ par exemple.

Exercice 5

1. Pour justifier l'existence de u , le définir par sa matrice (que l'on peut écrire éventuellement en prenant des bases différentes au départ et à l'arrivée).

Exercice 6

Par récurrence :

- Pour l'initialisation : vérifier qu'un endomorphisme nilpotent ne peut pas être bijectif.
- Pour l'hérédité, si $g = f_1 \circ \dots \circ f_k$, vérifier que $\text{Im}(g)$ est stable par f_{k+1} et que $\widetilde{f_{k+1}}$, l'endomorphisme induit par f_{k+1} sur $\text{Im}(g)$, reste nilpotent puis que $\text{Im}(f_{k+1}) = \text{Im}(f_{k+1} \circ g)$.