

L'usage des calculatrices est interdit

PROBLEME

(Inspiré de CCP PSI 2016 et Mines-Ponts PSI 2007 maths 1)

On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées à n lignes et n colonnes et à coefficients dans $\mathbb{R}$ et $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversibles.

On note I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et X_n la matrice (colonne) de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dont toutes les coordonnées valent 1 :

$$X_n = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note, pour $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $m_{i,j}$ ses coefficients.

Définition :

1. Une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite *stochastique* si tous ses coefficients sont positifs ou nuls et si $MX_n = X_n$.
On note $\mathcal{ST}_n$ l'ensemble des matrices stochastiques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite *strictement stochastique* si tous ses coefficients sont strictement positifs et si $MX_n = X_n$.
On note $\mathcal{ST}_n^+$ l'ensemble des matrices strictement stochastiques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Si $(M_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (ie une famille de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients dépendent de $k \in \mathbb{N}$), on dira que la suite $(M_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers la matrice N si

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \lim_{k \rightarrow +\infty} m_{i,j}(k) = n_{i,j},$$

où $m_{i,j}(k)$ désigne les coefficients de la matrice M_k et $n_{i,j}$ ceux de N . On écrira alors $\lim_{k \rightarrow +\infty} M_k = N$.

Par exemple, si $M_k = \begin{pmatrix} 2^{-k} & \cos\left(\frac{1}{k}\right) \\ -1 + e^{-k} & 0 \end{pmatrix}$, alors on a $\lim_{k \rightarrow +\infty} M_k = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

I Étude de 2 exemples**1. Un exemple en dimension 3**

Dans cette partie, on considère les matrices suivantes :

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad P = \frac{1}{6}B = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/3 & 1/6 \\ 1/3 & 1/2 & 1/6 \\ 1/6 & 1/6 & 2/3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A = I_3 - P$$

1. Vérifier que $P \in \mathcal{ST}_3^+$

2. Réduction de B

a) Montrer que $\mathbb{R}^3 = \ker(B - I_3) \oplus \ker(B - 3I_3) \oplus \ker(B - 6I_3)$ et déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ adaptée à cette décomposition.

On choisira des vecteurs dont la première coordonnée est 1.

b) En déduire une matrice $Q \in \mathcal{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que

$$P = QDQ^{-1} \quad \text{avec} \quad D = \begin{pmatrix} 1/6 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c) Calculer, pour $j \in \mathbb{N}$, D^j et en déduire que la suite $\left(\frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} D^j \right)_{k \in \mathbb{N}^*}$ converge vers une matrice Δ que vous explicitez.

Dans la suite de cette partie, on admettra que la suite $\left(\frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} P^j \right)_{k \in \mathbb{N}^*}$ converge et que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} P^j = Q \Delta Q^{-1}$$

3. Une expression de la limite

- Déterminer un polynôme $L \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que $\begin{cases} L(1/6) = L(1/2) = 0 \\ L(1) = 1 \end{cases}$
- Calculer $L(P)$ en fonction de Q et Q^{-1} et en déduire les coefficients de la matrice $Q \Delta Q^{-1}$.

4. Pseudo inverse de A

On rappelle que d'après les calculs précédents, on a, entre autres, $A = Q \begin{pmatrix} 5/6 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} Q^{-1}$.

On pose $A' = Q \begin{pmatrix} 6/5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} Q^{-1}$.

- Vérifier que A et A' commutent.
- Déterminer les matrices $AA'A$ et $A'AA'$ en fonction de A et A' .
- Calculer $I_3 - AA'$.

2. Le cas de la dimension 2

On suppose dans cette partie que $n = 2$ et, pour $\alpha \in [0, 1]$ et $\beta \in [0, 1]$ avec $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$, on note :

$$A(\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} 1 - \alpha & \alpha \\ \beta & 1 - \beta \end{pmatrix}$$

On notera aussi $\lambda = 1 - (\alpha + \beta)$.

5. Calculer $(A(\alpha, \beta) - I_2) \times (A(\alpha, \beta) - \lambda I_2)$

6. En déduire, pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$, $A(\alpha, \beta)^k = \frac{1 - \lambda^k}{1 - \lambda} A(\alpha, \beta) + \frac{\lambda - \lambda^k}{\lambda - 1} I_2$.

Afin que cette expression reste valable pour $k = 0$ lorsque $\lambda = 0$, on prendra comme convention $0^0 = 1$.

7. Montrer que, pour $(\alpha, \beta) \neq (1, 1)$, la suite $(A(\alpha, \beta)^k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers une matrice $L(\alpha, \beta)$ que l'on précisera. Que se passe-t-il pour $(\alpha, \beta) = (1, 1)$?

8. Déterminer, lorsque $(\alpha, \beta) \neq (1, 1)$, $\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} A(\alpha, \beta)^j$.

Que se passe-t-il pour $(\alpha, \beta) = (1, 1)$?

II Généralités sur les matrices stochastiques

1. Structure

- Montrer que $\mathcal{ST}_n$ est stable par produit, c'est-à-dire que pour tout couple $(M, N) \in \mathcal{ST}_n^2$, on a $MN \in \mathcal{ST}_n$.
 $\mathcal{ST}_n^+$ est-il aussi stable par produit ?
- $\mathcal{ST}_n$ et $\mathcal{ST}_n^+$ sont-ils des sous espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

2. Un calcul de rang

Dans cette question, M est une matrice de $\mathcal{ST}_n^+$.

a) Montrer que, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a $\sum_{j=1}^n m_{i,j} = 1$.

b) Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ un vecteur de $\ker(I_n - M)$. On note i_0 un indice pour lequel on a $|x_{i_0}| = \max_{1 \leq j \leq n} |x_j|$.

Montrer que $\sum_{j=1}^n m_{i_0,j} (x_{i_0} - x_j) = 0$.

- En examinant le signe des termes de la somme précédente, prouver que $X \in \text{Vect}\{X_n\}$.
- En déduire $\text{rg}(I_n - M) = n - 1$.

III Pseudo inverse

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et a l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à A . Montrer l'équivalence des propriétés suivantes :

- i. $\text{rg}(a) = \text{rg}(a^2)$.
- ii. $\ker(a) = \ker(a^2)$.
- iii. $\mathbb{R}^n = \text{Im}(a) \oplus \ker(a)$.
- iv. Il existe un entier naturel $r \leq n$, une matrice $B \in \mathcal{M}_r(\mathbb{R})$ inversible et une matrice $Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible tels que $A = Q \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q^{-1}$.

2. Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on dit que $A' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est un pseudo inverse de A lorsque les trois propriétés suivantes sont vérifiées :

$$\begin{aligned} AA' &= A'A \\ A &= AA'A \\ A' &= A'AA' \end{aligned}$$

- a) Montrer que si A admet un pseudo inverse alors on a $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^2)$.
- b) Réciproquement, on suppose que $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^2)$. En utilisant la propriété iv. de la question **III.1**, montrer que A admet un pseudo inverse.
3. On souhaite maintenant démontrer que A admet au plus un pseudo inverse. Pour cela on considère A'' un pseudo inverse quelconque de A . On note a l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à A et a'' celui associé à A'' .
 - a) Montrer que $\ker(a)$ et $\text{Im}(a)$ sont stables par a'' .
 - b) En déduire qu'il existe une matrice $D \in \mathcal{M}_r(\mathbb{R})$ telle que $A'' = Q \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q^{-1}$, l'entier r et la matrice Q étant ceux obtenus à la question **III.1.iv**.
 - c) Montrer que $a \circ a''$ est un projecteur de $\mathbb{R}^n$ dont on précisera le noyau et l'image en fonction de ceux de a . Préciser ce que vaut $Q^{-1}(AA'')Q$.
 - d) Montrer que A admet au plus un pseudo inverse.

4. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$. Montrer que A admet un pseudo inverse et le déterminer.

IV Calcul de limite

Dans cette dernière partie, P désigne une matrice de $\mathcal{ST}_n^+$ et on pose $A = I_n - P$

1. Justifier que $\text{rg}(A) = n - 1$.

On admettra que l'on a aussi $\text{rg}(A^2) = n - 1$, ce qui assure, d'après la partie **III**, l'existence et l'unicité d'un pseudo inverse A' de A .

2. Soit $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible. Établir, pour tout entier non nul k , l'identité

$$\sum_{j=0}^{k-1} (I_n - C)^j = (I_n - (I_n - C)^k) C^{-1}.$$

On pourra commencer par déterminer le polynôme $\left(\sum_{j=0}^{k-1} X^j \right) (1 - X)$.

3. Établir, pour tout entier non nul k , l'identité suivante

$$\sum_{j=0}^{k-1} P^j = (I_n - P^k) A' + k(I_n - AA')$$

4. Montrer que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} P^j$$

existe et donner sa valeur en fonction de I_n , A et A' .

5. Montrer que $(I_n - AA')$ est stochastique et que $(I_n - AA')A = 0$.

6. Montrer qu'il existe un vecteur colonne non nul $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que

$$I_n - AA' = X_n Y^T$$