

I Études de convergence

Exercice 1 [Solution]

Déterminer la nature des séries $\sum u_n$, $a > 0$.

$$u_n = \left(n \sin \frac{1}{n}\right)^{n^2} - e^{-\frac{1}{6}} \quad ; \quad u_n = \left(\cos \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{e}} \quad ; \quad u_n = \left(1 - \frac{1}{\ln n}\right)^{\sqrt{n}}$$

$$u_n = \cos \left(n^2 \pi \ln \left(\frac{n}{n-1}\right)\right) \quad ; \quad u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^a + (-1)^n}} \quad ; \quad u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-x^2} \sin x \, dx$$

Exercice 2 (Navale PSI 2019) [Solution]

Nature de $\sum u_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n n^\beta}$ en fonction de $\alpha \neq \beta$?

Exercice 3 (CCP PSI 2011) [Solution]

Nature de $\sum (1 - \tanh n)$?

Exercice 4 (CCINP PSI 2018) [Solution]

Donner la nature des séries de termes généraux $\frac{(\ln n)^{2018}}{n^\alpha}$ et $\frac{1}{n \ln n}$.

Exercice 5 (CCP PSI 2016) [Solution]

Montrer que la série de terme général $u_n = \ln(2n + (-1)^n) - \ln(2n)$ converge mais ne converge pas absolument.

Exercice 6 (Mines-Ponts PSI 2013) [Solution]

Etudier la convergence de la suite $u_n = \int_1^{+\infty} \exp(-x^n) \, dx$ puis la convergence de la série de terme général u_n .
indication : chercher un équivalent en posant $t = x^n$.

Exercice 7 (CCP PSI 2013) [Solution]

On pose $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(\cosh x)^n}$. Convergence de (I_n) puis de $\sum (-1)^n I_n$ et $\sum I_n$?

Exercice 8 (Centrale PSI 2008) [Solution]

Etudier la nature des séries de termes généraux $u_n = \left(\frac{n+1}{n-2}\right)^n - a \left(1 + \frac{b}{n}\right)$ et $v_n = \frac{(-1)^n}{n + (-1)^n \frac{\ln n}{n}}$.

Exercice 9 (ENSAM PSI 2012) [Solution]

- Montrer que la série de terme général $u_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ converge.
- Majorer $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ et donner une valeur approchée à 10^{-3} près de $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$.

indication : comparer $\ln(1+x)$ et $x - \frac{x^2}{2}$ pour $x \geq 0$.

Exercice 10 (Mines-Ponts PSI 2013) [Solution]

Nature de la série de terme général $u_n = \arccos \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right) - \frac{\pi}{6}$; ($\alpha > 0$)

Exercice 11 (Mines-Télécom PSI 2021) [Solution]

- Montrer que $\arccos(1-h) \underset{h \rightarrow 0^+}{\sim} \sqrt{2h}$; on pourra poser $\theta = \arccos(1-h)$
- Déterminer la nature de $\sum \arccos \left(\frac{1+n^3}{2+n^3}\right)$

Exercice 12 (CCP PSI 2008) [Solution]

Nature de la série de terme général $u_n = \frac{1}{1 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{3} + \dots + \sqrt[n]{n}}$.

indication : montrer que $x \mapsto \ln(x)/x$ est majorée sur $[1, +\infty[$.

Exercice 13 [Solution]

Étudier, en fonction de $\alpha \in \mathbb{R}$, la nature de la série $\sum \left(\frac{1}{n!}\right)^{\frac{\alpha}{n}}$.

indication : réécrire la formule de Stirling avec un signe $=$ pour pouvoir la composer par $\ln$.

Exercice 14 [Solution]

Étudier la convergence de la série $\sum \frac{(-1)^n}{(n!)^{\frac{1}{n}}}$.

indication : on pourra étudier la monotonie de $v_n = \frac{1}{n} \ln(n!)$.

Exercice 15 [Solution]

On pose $u_n = \sqrt{n} + a\sqrt{n+1} + b\sqrt{n+2}$, où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Déterminer (a, b) pour que $\sum u_n$ converge et calculer la somme.

Exercice 16 (Centrale PC 2008) [Solution]

Soient a, b et c dans $\mathbb{R}^{+*}$ et $u_n = 2 \ln(n+a) - \ln(n+b) - \ln(n+c)$. Étudier la convergence de $\sum u_n$ puis de $\sum (-1)^n u_n$.

Exercice 17 (Centrale PSI 2025) [Solution]

Soit $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ admettant un $DL_k(+\infty)$, $k \geq 2$, de la forme $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \dots + \frac{a_k}{x^k} + o\left(\frac{1}{x^k}\right)$.

1. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que la série $\sum_{n \geq 1} f(n)$ converge.

2. On pose $p_n = \prod_{k=2}^n f(k)$. À quelles conditions la suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est-elle convergente ?

indication : considérer $\ln(p_n)$ lorsque c'est possible.

Exercice 18 (CCP PSI 2016) [Solution]

Soient $\alpha > 1$, $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha}$ et $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$.

1. Montrer que $R_n \sim \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$.

2. Étudier la convergence de $\sum \frac{R_n}{S_n}$ en fonction de α .

Exercice 19 (Mines-Télécom PSI 2022) [Solution]

Soient $\alpha > 0$, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs, $S_n = \sum_{k=1}^n u_k$ et $w_n = \frac{u_n}{S_n^\alpha}$.

1. On suppose que $\sum u_n$ converge. Quelle est la nature de $\sum w_n$?

2. On suppose $u_n = n$. Nature de $\sum w_n$?

3. On suppose $u_n = \frac{1}{n}$. Nature de $\sum w_n$?

Exercice 20 (Mines-Télécom PSI 2023) [Solution]

Soient $(\rho_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs telle que $\sum \rho_n$ diverge et $S_n = \sum_{k=0}^n \rho_k$.

1. Montrer que $\sum \frac{\rho_n}{S_n}$ diverge.

indication : Dans le cas où $\lim \frac{\rho_n}{S_n} = 0$, prouver $\frac{\rho_n}{S_n} \sim \ln\left(\frac{S_n}{S_{n-1}}\right)$

2. Montrer que $\sum \frac{\rho_n}{S_n^2}$ converge.

indication : Comparer $\frac{\rho_n}{S_n^2}$ et $\frac{1}{S_{n-1}} - \frac{1}{S_n}$

Exercice 21 (Mines-Télécom PSI 2021) [Solution]

Soient $\alpha > 0$ et $S_n = \sum_{k=1}^n k^\alpha$. Pour quelles valeurs de α , la série $\sum \frac{1}{S_n}$ est-elle convergente ?

Exercice 22 [Solution]

Nature en fonction de $(x, \alpha) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ de $\sum \left(\sqrt{1 + \frac{x^n}{n^\alpha}} - 1\right)$?

Exercice 23 (Mines-Ponts PSI 2017) [Solution]

Etudier la convergence de $\sum \frac{1}{n^a} \sin\left(\frac{n\pi}{5}\right)$ pour $a > 0$.

indication : faire des paquets selon le reste de la division euclidienne de n par 5.

Exercice 24 (Mines-Télécom PSI 2017) [Solution]

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \int_0^1 \ln(1+t^n) dt$.

1. Calculer u_0 et u_1 .
2. Montrer que $\frac{x}{1+x} \leq \ln(1+x) \leq x$ si $x > -1$.
3. Etudier la nature de $\sum u_n$ et $\sum (-1)^n u_n$.

Exercice 25 [Solution]

On pose $a_n = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sqrt{k}$.

1. Montrer que la suite $\left(a_n + (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{2}\right)_{n \geq 1}$ a une limite $l > 0$ finie.
2. Quelle est la nature de $\sum \frac{1}{a_n}$?

Exercice 26 (CCP PSI 2019) [Solution]

1. Montrer que $x^n + x\sqrt{n} - 1 = 0$ admet une unique solution dans $[0, 1]$; on la note x_n .
2. Montrer que (x_n) tend vers 0.
3. Étudier la nature de la série de terme général x_n puis $(-1)^n x_n$.

Exercice 27 (Mines-Ponts PSI 2017) [Solution]

Soit $f(x) = \frac{(\ln x)^\alpha}{x} e^{i \ln x}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. Étudier la convergence de $\int_1^{+\infty} f(x) dx$. *indication : $u = \ln(x)$ puis IPP.*
2. Puis celle de $\sum_{n \geq 2} f(n)$. *indication : Taylor*

Exercice 28 (Mines-Ponts PSI 2019) [Solution]

Soit $I_n = \frac{1}{n^a} \int_0^n \frac{\arctan t}{t^b} dt$. Étudier la nature de $\sum u_n$ dans les cas

1. $b > 0$, $b \neq 1$
2. $b \leq 0$
3. $b = 1$

Exercice 29 [Solution]

Soit $u_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k}$. Étudier la convergence de $\sum u_n$.

indication : introduire les restes de la série $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

Exercice 30 (CCINP PSI 2023) [Solution]

Soit $u_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}}$, pour $n \geq 1$

1. Montrer que u_n existe et tend vers 0
2. On pose $v_n = \frac{(-1)^n}{n} u_n$. Montrer que $\sum v_n$ converge
3. On pose $w_n = \frac{(-1)^n}{n} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}}$. Quelle est la nature de $\sum w_n$?
4. On pose $x_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}}$. Quelle est la nature de $\sum x_n$?

Exercice 31 (CCINP PSI 2021) [Solution]

Déterminer la nature des séries suivantes :

$$1. \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n} \int_{n^2}^{+\infty} e^{-x^2} dx$$

$$2. \sum_{n \geq 0} (-1)^n \int_0^n e^{-t^2 n^2} dt.$$

indication : poser $x = nt$ puis faire intervenir la première suite.

Exercice 32 (Mines-Ponts PSI 2018) [Solution]

Soit f de $\mathbb{R}^{+*}$ dans lui-même.

- Donner une condition nécessaire pour que $\sum \frac{(-1)^n}{f(n)}$ converge. Est-elle suffisante ?
- On suppose jusqu'à la fin que cette condition nécessaire est réalisée. On suppose f croissante à partir de $n \in \mathbb{N}$.
 $u_n = \sum_{k \geq n} \frac{(-1)^k}{f(k)}$ existe-t-elle ? Quelle est sa limite quand n tend vers $+\infty$? Son signe ?
- On suppose cette fois $\frac{1}{f(k+2)} + \frac{1}{f(k)} \geq \frac{2}{f(k+1)}$. Montrer que $\sum \frac{(-1)^k}{f(k)}$ converge

Exercice 33 (CCINP PSI 2019) [Solution]

Pour $p \in \mathbb{N}$, on pose $S_p = \sum_{n \geq 0} \frac{n^p}{2^n}$

- Justifier l'existence de S_p
- En développant $(n+1)^p$, exprimer S_p en fonction de $S_0, \dots, S_{p-1}$
- En déduire que $S_p \in \mathbb{N}$.

Exercice 34 (CCINP PSI 2022) [Solution]

- Justifier l'existence de $R_n = \sum_{k \geq n+1} \frac{1}{k!}$.
- On admet $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n+1)!R_n = 1$; déterminer la nature de $\sum \sin(2n!\pi e)$.
indication : Écrire e avec une série dont R_n est le reste et comparer $\sin(2n!\pi e)$ et $\sin(2\pi n!R_n)$
- Montrer $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n+1)!R_n = 1$.
indication : Réécrire $(n+1)!R_n$ en isolant les deux premiers termes de R_n

Exercice 35 (Mines-Télécom PSI 2025) [Solution]

Pour $k \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_k = a^k \frac{(n+2)!}{(n+k+2)!}$

- Montrer que $\sum u_k$ converge et $\left| \sum_{k=0}^{+\infty} u_k \right| \leq e^{|a|}$.
- On pose $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{a^k}{k!}$. Montrer que $R_n \sim \frac{a^{n+1}}{(n+1)!}$.
indication : majorer $\left| R_n - \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} \right|$.
- En déduire la nature de la série de terme général $v_n = \sin(2\pi en!)$.

II Calcul de sommes

Exercice 36 [Solution]

Convergence et somme des séries : $\sum_{n \geq 2} \frac{2n+3}{(n-1)n(n+2)}$; $\sum_{n \geq 0} 3^{n-1} \sin^3 \frac{\alpha}{3^n}$; $\sum_{n \geq 0} \frac{2n^3 - 3n^2 + 1}{(n+3)!}$

Exercice 37 [Solution]

Sachant que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$.

Exercice 38 (CCP PSI 2015) [Solution]

On admet $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln(2)$. Justifier la convergence et calculer la somme de $\sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k} \right)$ puis de $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{4n^3 - n}$.

Exercice 39 (Mines-Ponts PSI 2021) [Solution]

On admet $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \ln(n) + \gamma + o(1)$ avec γ une constante. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{2n+2}{2n+5} u_n$

1. Montrer qu'il existe une suite (w_n) convergente telle que $\ln(u_n) = w_n - \frac{3}{2} \ln(n)$.
2. En déduire que $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge.
3. Montrer, pour $n \geq 1$, $2 \sum_{k=1}^{n+1} k u_k + 3 \sum_{k=1}^{n+1} u_k = 2 \sum_{k=0}^n k u_k + 2 \sum_{k=0}^n u_k$ et en déduire la valeur de $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Exercice 40 (Mines-Ponts PSI 2016) [Solution]

1. Par une comparaison série/intégrale, trouver un équivalent de $u_n = \sum_{k=2}^n \frac{\ln k}{k}$.
2. Étudier la monotonie et la convergence de (v_n) avec $v_n = u_n - \frac{1}{2}(\ln n)^2$.
3. On admet que $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + o(1)$; Montrer que $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k \ln k}{k} = \left(\gamma - \frac{\ln 2}{2}\right) \ln 2$.

Exercice 41 (ENTPE-EIVP PSI 2009) [Solution]

1. Convergence de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{R(n)}{n(n+1)}$, où R_n est le reste de la division euclidienne de n par 5.
2. Exprimer $S_{5n} = \sum_{k=1}^{5n} \frac{R(k)}{k(k+1)}$ à l'aide de $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ et en déduire la somme de $\sum_{n \geq 1} \frac{R(n)}{n(n+1)}$.
indication : on pourra utiliser ou démontrer qu'il existe $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que $H_n = \ln n + \gamma + o(1)$.

Exercice 42 (ENSEA PSI 2008) [Solution]

Convergence et somme de $\sum_{n \geq 1} \frac{s(n)}{n(n+1)}$, où $s(n)$ est le nombre de décimales de n . (Utiliser une décomposition bien choisie)

Exercice 43 (Mines-Ponts PSI 2009) [Solution]

Montrer que $\sum (-1)^{n+1} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ converge et calculer la somme.

indication : introduire $u_n = \sum_{k=1}^n \ln(k)$, exprimer $\sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k+1} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)$ en fonction de u_{2n} et u_n puis utiliser la formule de Stirling.

III Suites récurrentes

Exercice 44 (CCINP PSI 2022) [Solution]

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $0 < u_0 \leq \frac{\pi}{2}$ et $u_{n+1} = \sin(u_n)$.

1. Étudier la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et déterminer sa limite.
2. En calculant $u_{n+1} - u_n$, montrer que $\sum u_n^3$ converge.
3. Étudier la série de terme général u_n^2 .
indication : utiliser $\sum (\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n))$

Exercice 45 (CCP PSI 2016) [Solution]

Soit (u_n) définie par $u_0 \in [0, \pi]$ et $u_{n+1} = 1 - \cos(u_n)$.

1. Montrer que (u_n) converge vers 0.
2. Déterminer la nature de $\sum u_n$.

indication : vérifier que $1 - \cos x \leq \frac{1}{2} x^2$

Exercice 46 (CCINP PSI 2018) [Solution]

Soit (u_n) définie par $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = \frac{e^{-u_n}}{n+1}$.

1. Quelle est la limite de la suite (nu_n) ?
2. Donner la nature des séries de termes généraux u_n et $(-1)^n u_n$.

Exercice 47 (Mines-Ponts PSI 2019) [Solution]

Étudier la suite (x_n) définie par $x_0 = 0$ et $x_{n+1} = \sqrt{\frac{x_n + 1}{2}}$ puis la série de terme général $u_n = 1 - x_n$.

Exercice 48 (Centrale PSI 2016) [Solution]

Soit (x_n) définie par $x_0 > 0$ et $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_n}$.

1. Donner la nature de $\sum \frac{1}{x_n}$.
2. Quel lien y-a-t-il entre x_{n+1}^2 et $\sum_{k=0}^n \frac{1}{x_k^2}$?
3. Déterminer un équivalent de x_n .
indication : justifier que $\sum_{k=0}^n \frac{1}{x_k^2} = o(n)$.

IV Comparaison de séries

Exercice 49 [Solution]

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels positifs et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $v_0 > 0$ et $2v_{n+1} = v_n + \sqrt{u_n + v_n^2}$. Montrer que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge si et seulement si $\sum u_n$ converge.

Exercice 50 (CCINP PSI 2021) [Solution]

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle positive. On définit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $u_0 \in \mathbb{R}^+$ et $u_{n+1} = \frac{u_n + \sqrt{u_n^2 + a_n^2}}{2}$ pour $n \geq 0$

1. Montrer que $u_{n+1} - u_n \leq \frac{a_n}{2}$.
2. En déduire que si $\sum a_n$ converge alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.
3. La réciproque est-elle vraie ? On pourra utiliser $u_n = \frac{n}{n+1}$

Exercice 51 (ICNA PSI 2009) [Solution]

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite décroissante tendant vers 0.

1. Comparer la nature des séries $\sum_{n \geq 1} u_n$ et $\sum_{n \geq 1} n(u_n - u_{n+1})$.

indication : si (u_n) tend vers 0 alors $u_n = \sum_{k=n}^{+\infty} (u_k - u_{k+1})$

2. Montrer que si les séries convergent alors (nu_n) tend vers 0 et que les sommes des séries sont égales.

Exercice 52 (CCINP PSI 2025) [Solution]

1. Soient (u_n) et (v_n) deux suites avec $\forall n \in \mathbb{N}, v_n \geq 0$. On suppose que $\sum v_n$ converge. On pose $U_n = \sum_{k=n}^{+\infty} u_k$, si

$\sum u_n$ converge, et $V_n = \sum_{k=n}^{+\infty} v_k$

- a) On suppose $u_n = o(v_n)$. Montrer que $U_n = o(V_n)$.
indication : utiliser la ε -définition de la limite.
- b) On suppose $u_n \sim v_n$. Montrer que $U_n \sim V_n$.

2. Le but de cette question est d'améliorer la formule de Stirling. On pose $a_n = \ln \left(\frac{n! e^n}{n^{n+1/2}} \right)$ et $u_n = a_{n+1} - a_n$.

- a) En remarquant que $\frac{1}{n^2} \sim \frac{1}{n(n+1)}$, déterminer un équivalent de $R_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$.
- b) Trouver un équivalent de u_n puis un développement de a_n avec la précision $o\left(\frac{1}{n}\right)$.
- c) Conclure

Exercice 53 (Centrale PSI 2013) [Solution]

Soient (a_n) une suite de réels positifs et σ une bijection de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{N}$. Montrer que $\sum a_n$ converge si et seulement si $\sum a_{\sigma(n)}$ converge. Montrer qu'en cas de convergence, les sommes sont égales.

V Produits infinis

Exercice 54 (Produit infini) [Solution]

Soit $\sum_{n \geq 1} u_n$ une série à termes complexes absolument convergente telle que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, |u_n| < 1$. On pose $P_n = \prod_{k=1}^n (1 + u_k)$.

1. On suppose que $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \in \mathbb{R}$. Montrer que $(P_n)_{n \geq 1}$ converge.
indication : étudier $\ln(P_n)$.
2. En utilisant la série $\sum P_{n+1} - P_n$, montrer que le résultat est encore valable si $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

Exercice 55 (Centrale PSI 2017) [Solution]

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on pose $u_n = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k^\alpha}{n^2}\right)$.

1. Pour $\alpha = 2$, étudier la convergence et la limite de (u_n) .
indication : $\ln(u_n)$ et reconnaître une somme de Riemann.
2. Pour $\alpha \in [0, 1]$, convergence et limite éventuelle de la suite (a_n) avec $a_n = \sum_{k=1}^n \frac{k^\alpha}{n^2}$
3. Même question pour u_n .
indication : vérifier $\ln(1+x) \leq x$ sur $] -1, +\infty[$.

Exercice 56 (Centrale PSI 2013) [Solution]

Soient (u_n) une suite réelle positive et $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$. On suppose $S_{2n} \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right) S_n$. Montrer que $\sum u_n$ converge.

indication : majorer S_{2^n} .

Exercice 57 (Mines-Ponts PC 2012) [Solution]

1. Que dire de la limite en $+\infty$ de $u_n = \prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{\sqrt{k}}\right)$?
2. Montrer que la série de terme général u_n est convergente.

Exercice 58 (Centrale PSI 2023) [Solution]

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ deux suites de réels strictement positifs. On pose $a_n = u_n v_n$ et on définit le déterminant Δ_n

$$\text{par : } \Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & -v_1 & & & \\ u_1 & 1 & -v_2 & (0) & \\ 0 & u_2 & \ddots & \ddots & \\ & (0) & \ddots & 1 & -v_n \\ & & & u_n & 1 \end{vmatrix}$$

1. Trouver une relation entre Δ_n , Δ_{n-1} et Δ_{n-2}
2. Montrer que $\Delta_n \leq \prod_{k=1}^n (1 + a_k)$
3. Montrer que la suite (Δ_n) converge si et seulement si $\sum a_n$ converge

VI Exercices théoriques

Exercice 59 (Centrale PSI 2011) [Solution]

Soient (a_n) et (b_n) deux suites réelles positives.

1. Montrer que si $\lim b_n = +\infty$ alors $\sum \frac{1}{n^{b_n}}$ converge.
2. Si $\lim a_n = \lim b_n = +\infty$, la série $\sum \frac{1}{a_n^{b_n}}$ converge-t-elle ?

Exercice 60 (Règle de Raabe-Duhamel) [Solution]

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{R}^{+*}$ telle que :

$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$. En étudiant la série de la série $\sum \ln(v_{n+1}) - \ln(v_n)$ où $v_n = n^\alpha u_n$, déterminer un équivalent de u_n et en déduire, en fonction de α , la nature de la série $\sum u_n$.

Exercice 61 (Transformation d'Abel) [Solution]

1. Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ deux suites réelles ; on pose $V_n = \sum_{k=1}^n v_k$, pour $n \geq 1$ et $V_0 = 0$. Montrer que, si $n \in \mathbb{N}$,

$$n \geq 2, \text{ on a : } \sum_{k=1}^n u_k v_k = \sum_{k=1}^{n-1} (u_k - u_{k+1}) V_k + u_n V_n$$

2. On suppose que (u_n) tend vers 0 en décroissant et que la suite (V_n) est bornée. Montrer que $\sum u_n v_n$ converge.

3. Déterminer, en fonction de $(x, \alpha) \in \mathbb{R}^2$, la nature de $\sum \frac{\cos n\theta}{n^\alpha}$.

Exercice 62 (Somme des relations de comparaison) [Solution]

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles positives équivalentes.

1. Montrer que si $\sum u_n$ diverge, alors $U_n = \sum_{k=0}^n u_k$ et $V_n = \sum_{k=0}^n v_k$ sont équivalents.

2. Montrer que si $\sum u_n$ converge alors $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ et $R'_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k$ sont équivalents.

Solutions

Exercice 1 [sujet] 1. En partant d'un DL du sin en $O(1/n^5)$ avec $u_n = \exp\left[n^2 \ln\left(n \sin \frac{1}{n}\right)\right]$, on trouve $u_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc $\sum u_n$ est ACV.

2. Par DL, on trouve $u_n \sim \frac{-e^{-1/2}}{12n}$, négatif donc $\sum u_n$ DV.

3. Comme $u_n = \exp\left(-\frac{\sqrt{n}}{\ln n}(1+o(1))\right)$, on vérifie $u_n = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc $\sum u_n$ est ACV.

4. Par DL, $u_n = \frac{(-1)\pi}{3n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc $\sum u_n$ CV.

5. On trouve $u_n - \frac{(-1)^n}{n^{a/2}} \sim \frac{1}{2n^{3a/2}}$ positif; comme $a/2 > 0$, $\sum \frac{(-1)^n}{n^{a/2}}$ CV donc $\sum u_n$ et $\sum \left(u_n - \frac{(-1)^n}{n^{a/2}}\right)$ sont de même nature; par équivalent de signe fixe, de même nature que $\sum \frac{1}{n^{3a/2}}$. En conclusion, $\sum u_n$ CV si et seulement si $a > 2/3$.

6. On a $|u_n| \leq \pi e^{-(n\pi)^2} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc $\sum u_n$ est ACV.

Exercice 2 [sujet] Si $\beta > \alpha$ alors $u_n \sim \frac{1}{n^\beta}$, positif donc $\sum u_n$ CV si et seulement si $\beta > 1$. Par contre, si $\alpha > \beta$ alors $u_n - \frac{(-1)^n}{n^\alpha} \sim \frac{-1}{n^{2\alpha-\beta}}$; on en déduit la DVG si $\alpha \leq 0$. Si $\alpha > 0$, $\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ converge donc $\sum u_n$ et $\sum \left(u_n - \frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)$ sont de même nature, puis par équivalent de signe fixe, $\sum u_n$ CV si et seulement si $2\alpha - \beta > 1$.

Exercice 3 [sujet] $1 - \tanh n = \frac{2e^{-n}}{e^n + e^{-n}} \sim 2e^{-2n}$ positif donc $\sum u_n$ CV.

Exercice 4 [sujet] Bertrand

Exercice 5 [sujet] $u_n = \frac{(-1)^n}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc $|u_n| \sim \frac{1}{2n}$ positif et $\sum |u_n|$ DV; avec le DL, $\sum u_n$ CV.

Exercice 6 [sujet] 1. $\lim u_n = 0$ par TCD avec $0 \leq \exp(-x^n) \leq e^{-x}$ (pour $n \geq 1$)

2. $nu_n \stackrel{t=x^n}{=} \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} t^{1/n} dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt = C > 0$ par TCD avec $0 \leq \frac{e^{-t}}{t} t^{1/n} \leq e^{-t}$ donc $u_n \sim \frac{C}{n}$ (positif) et $\sum u_n$ DV

Exercice 7 [sujet] $\lim I_n = 0$ par TCD avec $0 \leq \frac{1}{\operatorname{ch}^n x} \leq \frac{1}{\operatorname{ch} x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 2e^{-x}$

$\sum (-1)^n I_n$ CV par CSSA car $\frac{1}{\operatorname{ch}} \leq 1$ mais comme $\operatorname{ch}(x) \leq e^x$, on a $I_n \geq \int_0^{+\infty} e^{-nx} dx = \frac{1}{n}$ donc $\sum I_n$ DV.

Exercice 8 [sujet] 1. On a $u_n = (e^3 - a) + \left(\frac{3e^3}{2} - ab\right) \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Si $a \neq e^3$ DVG; si $a = e^3$ et $b \neq \frac{3}{2}$, $u_n \sim \left(\frac{3e^3}{2} - ab\right) \frac{1}{n}$ de signe fixe donc DV; si $a = e^3$ et $b = \frac{3}{2}$, $u_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc ACV.

2. $v_n = \frac{(-1)^n}{n} + O\left(\frac{\ln n}{n^3}\right) = \frac{(-1)^n}{n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc $\sum v_n$ CV.

Exercice 9 [sujet] 1. $u_n = \exp(-n + 1/2 + o(1))$ donc $u_n \sim \sqrt{e}e^{-n}$ positif donc $\sum u_n$ CV.

2. Etudier $x \mapsto \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}$ sur $\mathbb{R}^+$, elle est positive; on en déduit $0 \leq u_n \leq \sqrt{e}e^{-n}$ donc $0 \leq R_n \leq \sqrt{e} \sum_{k=n+1}^{+\infty} e^{-k} = \frac{e^{-n-1/2}}{1 - e^{-1}}$. Il suffit donc que $\frac{e^{-n-1/2}}{1 - e^{-1}} \leq 10^{-3}$ (qui peut donner une valeur de n en prenant le logarithme) pour que la somme partielle de la série soit une approximation convenable de la somme totale.

Exercice 10 [sujet] On cherche un DL en 0 de $f(x) = \arccos\left(\frac{\sqrt{\pi}}{3} + x\right)$ (dérivable au voisinage de 0); on trouve $f'(x) = -2 - 8x\sqrt{3} + o(x)$ donc $f(x) = f(0) - 2x - 4x^2\sqrt{3} + o(x^2)$ puis $u_n = 2\frac{(-1)^n}{n^\alpha} - 4\sqrt{3}\frac{1}{n^{2\alpha}} + o\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right)$. Comme $\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ CV, $\sum u_n$ et $\sum \left(u_n - \frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)$, puis par équivalent de signe fixe, $\sum \frac{1}{n^{2\alpha}}$ sont de même nature. On en déduit $\sum u_n$ CV si et seulement si $2\alpha > 1$.

Exercice 11 [sujet] 1. $\theta = \arccos(1 - h) \Leftrightarrow h = 1 - \cos(\theta)$ et $h \rightarrow 0^+$ si et seulement si $\theta \rightarrow 0^+$; $1 - \cos \theta \underset{\theta \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{\theta^2}{2}$
donc (composition des limites) $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h}{f(h)^2} = \frac{1}{2}$ et comme $f(h) \geq 0$, on a bien $f(h) \underset{h \rightarrow 0^+}{\sim} \sqrt{2h}$

2. $u_n = \arccos\left(1 - \frac{1}{2 + n^3}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{2}{2 + n^3}} \sim \frac{\sqrt{2}}{n^{3/2}}$ (positif) donc la série CV

Exercice 12 [sujet] Par une étude de fonction $\frac{\ln x}{x} \in \left[0, \frac{1}{e}\right]$ sur $[1, +\infty[$ donc $u_n = \left(\sum_{k=1}^n \exp \frac{\ln k}{k}\right)^{-1} \geq \frac{e^{1/e}}{n}$ donc $\sum u_n$ DV.

Exercice 13 [sujet] $n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}(1+o(1))$ donc $\ln(n!) = n \ln n - n + \frac{1}{2} \ln(n) + \frac{1}{2} \ln(2\pi) + o(1)$ et $u_n = \exp\left[-\frac{\alpha}{n} \ln(n!)\right] = \exp(-\alpha \ln(n) + \alpha + o(1)) \sim \frac{e^\alpha}{n^\alpha}$ positif donc $\sum u_n$ CV si et seulement si $\alpha > 1$.

Exercice 14 [sujet] On vérifie le CSSA : $|u_n|$ tend vers 0 avec la formule de Stirling (cf calcul dans l'ex précédent) et $|u_n| = \exp(-v_n)$, il suffit donc de prouver que (v_n) croît : $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^n (\ln(n+1) - \ln(k)) \geq 0$.

Exercice 15 [sujet] On a $u_n = (1 + a + b)\sqrt{n} + \left(\frac{a}{2} + b\right) \frac{1}{\sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$. Si $1 + a + b \neq 0$ DVG ; si $1 + a + b = 0$ et $a + 2b \neq 0$, $u_n \sim \left(\frac{a}{2} + b\right) \frac{1}{\sqrt{n}}$ de signe fixe donc $\sum u_n$ DV ; si $a = -2$ et $b = 1$ $u_n = O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$ donc $\sum u_n$ est ACV.

Si $a = -2$ et $b = 1$, (en changeant les indices) $\sum_{k=1}^n u_k = 1 + \sqrt{2} - 2\sqrt{2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n+1} + \sqrt{n+3}$ donc $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = 1 - \sqrt{2}$.

Exercice 16 [sujet] $u_n = \frac{2a - b - c}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc si $2a \neq b + c$, $u_n \sim \frac{2a - b - c}{n}$ de signe fixe et $\sum u_n$ DV ; si $2a = b + c$ alors $u_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc $\sum u_n$ est ACV.

Comme $(-1)^n u_n = (2a - b - c) \frac{(-1)^n}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$, $\sum (-1)^n u_n$ CV pour tout (a, b, c) .

Exercice 17 [sujet] 1. Si $a_0 \neq 0$ alors DVG, si $a_0 = 0$ et $a_1 \neq 0$ alors $f(n) \sim \frac{a_1}{n}$ (signe fixe) donc DV et si $a_0 = a_1 = 0$ alors $f(x) = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc la série est ACV

2. Si $|a_0| < 1$ alors il existe $0 < q < 1$ tel que $|f(k)| \leq q$ pour $k \geq n_0$ donc $|p_n| \leq |p_{n_0}| q^{n-n_0}$ donc (p_n) CV vers 0. De même, si $|a_0| > 1$, on a $|f(k)| \geq q > 1$ pour $k \geq n_0$ et $(|p_n|)$ tend vers $+\infty$ donc (p_n) DV.

Si $a_0 = 1$ alors $f(k) > 0$ pour $k \geq n_0$; on pose $p'_n = \prod_{k=n_0}^n f(k)$ et on a $\ln(p'_n) = \sum_{k=n_0}^n \ln(f(k))$ avec $\ln(f(k)) =$

$\frac{a_1}{k} + O\left(\frac{1}{k^2}\right)$. Si $a_1 = 0$ alors $\sum \ln(f(k))$ est ACV donc (p'_n) CV vers $\ell > 0$ (car $e^x > 0$) ; si $a_1 > 0$ alors $(\ln p'_n)$ tend vers $+\infty$ donc (p'_n) DV ; et si $a_1 < 0$ alors $(\ln p'_n)$ tend vers $-\infty$ donc (p'_n) CV vers 0.

Si $a_0 = -1$ alors $f(k) < 0$ APCR donc $(p_n)_{n \geq n_0}$ est alternée donc CV si et seulement si elle tend vers 0 donc si et seulement si $(|p_n|)$ CV vers 0. Comme $|f(x)| = 1 - \frac{a_1}{x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right)$, cela ne se produit que si $a_1 > 0$ d'après le cas précédent.

3. ?

Exercice 18 [sujet] 1. Par comparaison avec une intégrale (cf cours)

2. On a $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} = l \geq 1$ (donc $\neq 0$) ; on a donc $u_n = \frac{R_n}{S_n} \sim \frac{1}{l(\alpha - 1)n^{\alpha-1}}$ positif donc $\sum u_n$ CV si et seulement si $\alpha > 2$.

Exercice 19 [sujet] 1. Si on pose $S = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k > 0$ (car $u_n > 0$), on a $w_n \sim S^{-\alpha} u_n$ (SATP) donc $\sum w_n$ CV

2. $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$ donc $w_n \sim \frac{2^\alpha}{n^{2\alpha-1}}$ (SATP) donc $\sum w_n$ CV ssi $\alpha > 1$

3. $S_n \sim \ln(n)$ donc $w_n \sim \frac{1}{n \ln(n)^\alpha}$ (SATP) donc $\sum w_n$ CV ssi $\alpha > 1$ (Bertrand ; comp série/int)

Exercice 20 [sujet] 1. si $\lim \frac{\rho_n}{S_n} = 0$, $\ln\left(\frac{S_n}{S_{n-1}}\right) = -\ln\left(1 - \frac{\rho_n}{S_n}\right) \sim \frac{\rho_n}{S_n}$ (SATP) et $\ln\left(\frac{S_n}{S_{n-1}}\right) = \ln(S_n) - \ln(S_{n-1})$ donc $\sum \ln\left(\frac{S_n}{S_{n-1}}\right)$ DV car $\lim \ln(S_n) = +\infty$. Sinon $\sum \frac{\rho_n}{S_n}$ est GDV

2. $\frac{1}{S_{n-1}} - \frac{1}{S_n} = \frac{\rho_n}{S_n S_{n-1}} \geq \frac{\rho_n}{S_n^2}$ (SATP) et $\sum \left(\frac{1}{S_{n-1}} - \frac{1}{S_n}\right)$ CV car $\lim \frac{1}{S_n} = 0$

Exercice 21 [sujet] $t \mapsto t^\alpha$ est croissante donc $\int_0^n t^\alpha dt \leq S_n \leq \int_1^{n+1} t^\alpha dt$ puis $S_n \sim \frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ donc par équivalent de SATP, $\sum \frac{1}{S_n} CV$ pour tout $\alpha > 0$

Exercice 22 [sujet] Si $x > 1$ DVG ; si $x < -1$, la suite n'est pas définie. Si $|x| < 1$, $|u_n| \sim \frac{|x|^n}{n^\alpha} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc $\sum u_n$ est ACV. Si $x = 1$ et $\alpha \leq 0$, DVG ; si $x = 1$ et $\alpha > 0$, $u_n \sim \frac{1}{2n^\alpha}$ positif donc $\sum u_n$ CV si et seulement si $\alpha > 1$. Enfin, si $x = -1$ et $\alpha \leq 0$, la suite n'est pas définie, alors que si $\alpha > 0$, $u_n = \frac{(-1)^n}{2n^\alpha} - \frac{1}{8n^{2\alpha}} + o\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right)$ donc $\sum u_n$ CV si et seulement si $\sum \left(u_n - \frac{1}{2n^\alpha}\right)$ CV (car $\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ CV) et par équivalent de signe fixe, $\sum u_n$ CV si et seulement si $2\alpha > 1$.

Exercice 23 [sujet] On a, avec $\sin \frac{\pi}{5} = C \neq 0$ et $\sin \frac{2\pi}{5} = D \neq 0$, $u_{5k} = 0$, $u_{5k+1} = \frac{(-1)^k C}{(5k+1)^a}$, $u_{5k+2} = \frac{(-1)^k D}{(5k+2)^a}$, $u_{5k+3} = \frac{(-1)^k D}{(5k+3)^a}$ et $u_{5k+4} = \frac{(-1)^k C}{(5k+4)^a}$. On a alors, avec $S_n = \sum_{k=1}^n u_k$, $S_{5n} = \sum_{k=0}^{n-1} (u_{5k+1} + u_{5k+2} + u_{5k+3} + u_{5k+4})$ donc est la somme de 4 sommes partielles de séries CV donc CV. Comme $S_{5n+1} = S_{5n} + u_{5n+1}$ et $\lim u_{5n+1} = 0$, (S_{5n+1}) CV vers la même limite. De même avec $\lim u_{5n+2} = \lim u_{5n+3} = \lim u_{5n+4} = 0$, on trouve que (S_{5n+2}) , (S_{5n+3}) et (S_{5n+4}) CV aussi vers la même limite donc $\sum u_n$ CV.

Exercice 24 [sujet] 1. $u_0 = \ln 2$ et $u_1 = 2 \ln 2 - 1$

2. Par étude de fonction $\ln(1+x) \leq x$ si $x > -1$ puis $\ln(1+x) = -\ln \frac{1}{1+x} = -\ln \left(1 - \frac{x}{1+x}\right) \geq \frac{x}{1+x}$.

3. On en déduit $\int_0^1 \frac{t^n}{1+t^n} dt \leq u_n \leq \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1}$. De plus $\int_0^1 \frac{t^n}{1+t^n} dt \geq \frac{1}{2} \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{2(n+1)}$. On a $u_n \geq \frac{1}{2(n+1)}$ donc $\sum u_n$ DV. Mais par encadrement (u_n) tend vers 0 et $u_{n+1} - u_n = \int_0^1 [\ln(1+t^{n+1}) - \ln(1+t^n)] dt \leq 0$ donc par CSSA, $\sum (-1)^n u_n$ CV.

Exercice 25 [sujet] 1. Si $u_n = \left(a_n + (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{2}\right)$ alors $u_{n+1} - u_n = \frac{(-1)^n}{2} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \frac{(-1)^n}{2(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}$ donc

(CSSA) $\sum (u_{n+1} - u_n)$ CV, ie la suite (u_n) CV vers $l = \sum_{n \geq 1} (u_{n+1} - u_n) + u_1$; par CSSA, on a $\left| \sum_{n \geq 1} (u_{n+1} - u_n) \right| \leq$

$|u_2 - u_1| = \frac{1}{2(1+\sqrt{2})} < u_1 = \frac{1}{2}$ donc $l > 0$.

2. On a $a_n = (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{2} + l + o(1)$ donc $\frac{1}{a_n} = \frac{2(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{4l}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$. Comme $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ CV, $\sum \frac{1}{a_n}$ et $\sum \left(\frac{1}{a_n} - \frac{2(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$ sont de même nature et par équivalent de signe fixe, de même nature que $\sum \frac{1}{n}$. On en déduit que $\sum \frac{1}{a_n}$ DV.

Exercice 26 [sujet] 1. Par une étude de fonction, on vérifie que $P_n = X^n + X\sqrt{n} - 1$ s'annule une seule fois sur $[0, 1]$, que $P_n \leq 0$ sur $[0, x_n]$ et que $P_n \geq 0$ sur $[x_n, 1]$.

2. Comme $P_n \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \geq 0$, on a $\frac{1}{\sqrt{n}} \in [x_n, 1]$ donc $0 \leq x_n \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$ donc (x_n) tend vers 0.

3. On a $x_n = \frac{1}{\sqrt{n}}(1 - x_n^n)$ et comme $0 \leq x_n \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$, on a $0 \leq x_n^n \leq \frac{1}{n^{n/2}}$ donc $\lim x_n^n = 0$ et $x_n \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$ positif donc $\sum x_n$ DV. De plus $(-1)^n x_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{n^{(n+1)/2}}\right)$ donc $\sum (-1)^n x_n$ CV.

Exercice 27 [sujet] 1. f est $\mathcal{CM}^0$ sur $[1, +\infty[$; par changement de variable (à justifier), $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ est de même nature que $\int_0^{+\infty} u^\alpha e^{iu} du$; $u^\alpha e^{iu} \sim \frac{1}{u^{-\alpha}}$ est intégrable sur $]0, 1]$ si et seulement si $-1 < \alpha$; par IPP (cf cours) $\int_1^{+\infty} \frac{e^{iu}}{u^{-\alpha}} CV$ si et seulement si $\alpha < 0$.

2. On a $\int_n^{n+1} f(x) dx = f(n) + \int_n^{n+1} (n+1-t)f'(t) dt$ et $|f'(t)| \leq \frac{\alpha(\ln t)^{\alpha-1} + (\ln t)^\alpha + 1}{t^2}$ donc $\left| \int_n^{n+1} (n+1-t)f'(t) dt \right| \leq \frac{\alpha(\ln n)^{\alpha-1} + (\ln n)^\alpha + 1}{((n+1))^2} = o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$ on en déduit que $\sum f(n) CV$ si et seulement si $\left(\int_2^n f(t) dt\right)_{n \in \mathbb{N}} CV$ donc si et seulement si $\left(\int_1^{\ln n} u^\alpha e^{iu} du\right)_{n \in \mathbb{N}} CV$ donc la série CV si $\alpha < 0$; pour $\alpha \geq 0$, après 2 IPP successives, on trouve $\int_1^{\ln n} u^\alpha e^{iu} du = (\ln n)^\alpha + O((\ln n)^{\alpha-1}) \sim (\ln n)^\alpha$ donc la série DV pour $\alpha \geq 0$.

Exercice 28 [sujet] 1. On peut d'abord vérifier que $t \mapsto \frac{\arctan t}{t^b}$ est intégrable sur $]0, 1]$ si et seulement si $b < 2$. De plus $\frac{\arctan t}{t^b} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\pi}{2t^b}$ donc $I_n \sim \frac{C}{n^a}$ (positif) si $1 < b < 2$ avec $C = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan t}{t^b} dt > 0$ donc $\sum I_n CV$ ssi $a > 1$. Si $0 < b < 1$ alors $\int_0^n \frac{\arctan t - \pi/2}{t^b} dt = - \int_0^n \frac{\arctan(1/t)}{t^b} dt \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} - \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(1/t)}{t^b} dt$ car $\frac{\arctan(1/t)}{t^b} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{t^{b+1}}$ et $1+b > 1$. On en déduit $I_n \sim \frac{1}{n^a} \frac{\pi}{2} \int_0^n \frac{dt}{t^b} = \frac{\pi(1-b)}{2n^{a+1-b}}$ (positif) donc $\sum I_n CV$ ssi $a+b-1 > 1$.

2. A nouveau, $0 \leq \frac{\pi(1-b)}{2n^{b+a-1}} = \frac{1}{n^a} \int_0^n \frac{\arctan(1/t)}{t^b} dt \leq \frac{1}{n^a} \int_0^n t^{-(1+b)} dt = \frac{-b}{n^{a+b}}$ donc $I_n \sim \frac{\pi(1-b)}{2n^{b+a-1}}$ (positif) et $\sum I_n CV$ ssi $a+b-1 > 1$.

3. $\int_1^n \frac{\arctan t}{t} dt - \frac{\pi}{2} \ln(n) = \int_1^n \frac{\arctan t - \pi/2}{t} dt \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} \int_1^{+\infty} \frac{\arctan(1/t)}{t} dt$ car intégrable sur $[1, +\infty[$; comme $\int_0^1 \frac{\arctan t}{t} dt = o(\ln(n))$, on en déduit $I_n \sim \frac{\pi \ln(n)}{2n^a}$ (positif) et (Bertrand) $\sum I_n CV$ ssi $a > 1$.

Exercice 29 [sujet] On pose $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ et S la somme de cette série alternée CV; par CSSA, on a $|R_n| \leq \frac{1}{n+1}$ donc $u_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n} (S - R_n) = \frac{(-1)^{n+1} S}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc $\sum u_n CV$.

Exercice 30 [sujet] 1. Reste d'une série CV par CSSA

2. par CSSA, $|v_n| \leq \frac{1}{n\sqrt{n+1}} = O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$

3. Si $\ell = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}}$ alors $w_n = \frac{(-1)^n \ell}{n} - v_n$ donc $\sum w_n CV$

4. $x_n \sim \frac{\ell}{n}$ car $\ell = 1 + \sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}} \geq 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} > 0$ donc SATP et $\sum x_n DV$

Exercice 31 [sujet] 1. CV par CSSA : $\int_{n^2}^{+\infty} e^{-x^2} dx$ est le reste de l'intégrale $I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$ qui CV

2. $v_n = \frac{(-1)^n}{n} \int_0^{n^2} e^{-x^2} dx = \frac{(-1)^n}{n} I - u_n$ donc $\sum v_n CV$ aussi.

Exercice 32 [sujet] 1. f doit tendre vers $+\infty$ en $+\infty$ mais ce n'est pas suffisant : si f est telle que $f(n) = \ln(n) + (-1)^n$ alors $x_n = \frac{(-1)^n}{\ln(n) + (-1)^n} = \frac{(-1)^n}{\ln n} - \frac{1}{(\ln n)^2} + o\left(\frac{1}{(\ln n)^2}\right)$ donc $\sum \frac{(-1)^n}{\ln n + (-1)^n} DV$ car $\sum \frac{(-1)^n}{\ln n} CV$ et $x_n - \frac{(-1)^n}{\ln n} \sim -\frac{1}{(\ln n)^2}$ (négatif) donc $\sum \left(x_n - \frac{(-1)^n}{\ln n}\right) DV$

2. CSSA donc u_n existe, tend vers 0 (reste) et est du signe de $(-1)^n$

3. On a $v_k = \frac{1}{f(k+2)} - \frac{1}{f(k+1)} \geq \frac{1}{f(k+1)} - \frac{1}{f(k)} = v_{k-1}$ donc (v_k) croît et tend vers 0 donc $v_k \leq 0$, ce qui donne $\left(\frac{1}{f(k)}\right)$ décroissante et tend vers 0, le CSSA s'applique

Exercice 33 [sujet] 1. $\frac{n^p}{2^n} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

2. $(n+1)^p = n^p + \sum_{k=0}^{p-1} \binom{p}{k} n^k$ donc $\frac{(n+1)^p}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} \left(\frac{n^p}{2^n} + \sum_{k=0}^{p-1} \binom{p}{k} \frac{n^k}{2^n} \right)$ donc, en sommant, $S_{p-1} = \frac{1}{2} \left(S_p + \sum_{k=0}^{p-1} \binom{p}{k} S_k \right)$
et $S_p = 2 + \sum_{k=0}^{p-1} \binom{p}{k} S_k$

3. Par récurrence (forte) avec $S_0 = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{2^n} = 2$ et $\binom{p}{k} \in \mathbb{N}$

Exercice 34 [sujet] 1. $\sum \frac{1}{k!}$ CV

2. On a $e = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} + R_n$ donc $2n! \pi e = 2\pi \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!} + 2n! \pi R_n$ et $\sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!} \in \mathbb{N}$ donc $\sin(2n! \pi e) = \sin(2n! \pi R_n) \sim \frac{2\pi}{n+1}$ (positif) donc $\sum \sin(2n! \pi e)$ DV

3. $(n+1)! R_n = 1 + \frac{1}{n+2} + \sum_{k \geq n+3} \frac{(n+1)!}{k!}$ et $\sum_{k \geq n+3} \frac{(n+1)!}{k!} \leq \sum_{k \geq n+3} \frac{1}{k(k-1)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ (reste de série CV).

Exercice 35 [sujet] 1. $|u_k| = \frac{|a|^k}{(n+2+1)(n+2+2) \dots (n+2+k)} \leq \frac{|a|^k}{k!}$ car $n+2 \geq 0$.

2. $\frac{(n+1)!}{a^{n+1}} R_n = 1 + \sum_{k=n+2}^{+\infty} \frac{(n+1)!}{k!} a^{k-n+1} \stackrel{h=k-n+2}{=} 1 + \frac{1}{(n+2)a} \sum_{h=0}^{+\infty} u_h = 1 + o\left(\frac{1}{n}\right)$

3. Avec $a=1$, on a $2\pi e n! = 2\pi n! \left(\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} + R_n \right)$ et $n! \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \in \mathbb{N}$ donc $v_n = (2\pi n! R_n) \sim \frac{2\pi}{n}$ (SATP) donc $\sum v_n$ DV.

Exercice 36 [sujet] 1. On a $\frac{2n+3}{(n-1)n(n+2)} = \frac{5/3}{n-1} - \frac{3/2}{n} - \frac{1/6}{n+2}$; après changement d'indices sur les sommes partielles, on trouve $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2n+3}{(n-1)n(n+2)} = \frac{5}{3} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) - \frac{3}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right)$.

2. On a $3^{n-1} \sin^3 \frac{\alpha}{3^n} = \frac{1}{4} \left(3^n \sin \frac{\alpha}{3^n} - 3^{n-1} \sin \frac{\alpha}{3^{n-1}} \right)$ donc par télescope $\sum_{n=0}^{+\infty} 3^{n-1} \sin^3 \frac{\alpha}{3^n} = \frac{1}{4} \left(\alpha - \frac{1}{3} \sin 3\alpha \right)$ car $\lim 3^n \sin \frac{\alpha}{3^n} = \alpha$.

3. On a $\frac{2n^3 - 3n^2 + 1}{(n+3)!} = \frac{-80}{(n+3)!} + \frac{53}{(n+2)!} - \frac{15}{(n+1)!} + \frac{2}{n!}$ donc $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2n^3 - 3n^2 + 1}{(n+3)!} = -80 \left(e - 1 - 1 - \frac{1}{2} \right) + 53(e - 1 - 1) - 15(e - 1) + 2e$.

Exercice 37 [sujet] Si $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$ alors $H_{2n} = \frac{1}{4} H_n + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(2k+1)^2}$ donc $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.

$\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2} = -\frac{1}{4} H_n + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(2k+1)^2}$ donc (la série est ACV) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$.

Exercice 38 [sujet] $\left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k} \right) \sim \frac{1}{4k^2}$ positif donc la série CV; $\sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k} \right) = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ donc on obtient

$\sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k} \right) = \ln 2$.

$\frac{1}{4n^3 - n} = \frac{-1}{n} + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n+1}$ donc $\sum_{k=1}^n \frac{1}{4k^3 - k} = -\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + 2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1} + \frac{1}{2n+1} - 1 = 2 \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k} \right) + \frac{1}{2n+1} - 1$ donc $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^3 - n} = 2 \ln 2 - 1$

Exercice 39 [sujet] 1. $\ln(u_{n+1}) + \frac{3}{2} \ln(n+1) - \ln(u_n) - \frac{3}{2} \ln(n) = \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) - \ln \left(1 + \frac{5}{2n} \right) + \frac{3}{2} \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$
donc, si $w_n = \ln(u_n) + \frac{3}{2} \ln(n)$, on a bien (w_n) CV (lien suite/série)

2. Si on note $\ell = \lim w_n$, on a $\ln(u_n) = -\frac{3}{2} \ln(n) + \ell + o(1)$ donc $u_n \sim \frac{e^\ell}{n^{3/2}}$ (positif) donc $\sum u_n$ CV
3. Sommer la relation $2(k+1)u_{k+1} + 3u_{k+1} = 2ku_k + 2u_k$
4. On pose $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$ et $T_n = \sum_{k=0}^n ku_k$; on a $S_{n+1} = 3 + 2(T_n - T_{n+1}) + 2(S_{n+1} - S_n) = 3 - 2(n+1)u_{n+1} + 2u_{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 3$

Exercice 40 [sujet] 1. On trouve $u_n \sim \frac{(\ln n)^2}{2}$.

2. On trouve $v_{n+1} - v_n \sim -\frac{\ln n}{2n^2}$ négatif donc (v_n) décroît à partir d'un certain rang et $\sum (v_{n+1} - v_n)$ CV donc (v_n) CV.
3. En séparant les termes pairs et impairs, on trouve $\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k \ln k}{k} = (\ln 2)H_n + u_n - u_{2n}$ et comme $u_n = \frac{(\ln n)^2}{2} + l + o(1)$, on obtient le résultat annoncé (la série CV par CSSA qui est vérifié à partir d'un certain rang).

Exercice 41 [sujet] 1. $\left| \frac{R(n)}{n(n+1)} \right| \leq \frac{4}{n(n+1)}$ donc la série est ACV.

2. En séparant les termes selon que $n = 5k, 5k+1, 5k+2, 5k+3$ ou $5k+4$, on trouve, avec $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$,
- $$S_{5n} = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{5k+1} + \frac{1}{5k+2} + \frac{1}{5k+3} + \frac{1}{5k+4} \right) = H_{5n} - H_n = \ln(5n) - \ln(n) + o(1) \text{ donc } \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{R(k)}{k(k+1)} = \ln(5).$$

Exercice 42 [sujet] La CV peut être justifié par $s(n) = \lfloor \log_{10}(n) \rfloor$ donc $\frac{s(n)}{n(n+1)} = o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$ donc la série est ACV.

On a $s(n) = p$ pour $10^p \leq n \leq 10^{p+1} - 1$ donc $\sum_{n=10^p}^{10^{p+1}-1} \frac{s(n)}{n(n+1)} = p \sum_{n=10^p}^{10^{p+1}-1} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = p \left(\frac{1}{10^p} - \frac{1}{10^{p+1}} \right) = \left(\frac{p}{10^p} - \frac{p+1}{10^{p+1}} \right) + \frac{1}{10^{p+1}}$. On a alors $\sum_{n=1}^{10^{N+1}-1} \frac{s(n)}{n(n+1)} = \sum_{p=0}^N \left(\sum_{n=10^p}^{10^{p+1}-1} \frac{s(n)}{n(n+1)} \right) = -\frac{N+1}{10^{N+1}} + \sum_{p=1}^{N+1} \frac{1}{10^p}$ donc $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{s(n)}{n(n+1)} = \frac{1}{9}$.

Exercice 43 [sujet] Tout d'abord la série CV par CSSA. Puis on a $\sum_{k=1}^{2n} (-1)^{n+1} \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) = \sum_{k=1}^n (\ln(2k) - \ln(2k+1)) +$

$\sum_{k=0}^{n-1} (\ln(2k+2) - \ln(2k+1)) = 2 \sum_{k=1}^n \ln(2k) - 2 \sum_{k=0}^{n-1} \ln(2k+1) - \ln(2n+1) = 4n \ln 2 + 4u_n - 2u_{2n} - \ln(2n+1)$ puis avec

$u_n = \ln(n!) = n \ln(n) - n + \frac{1}{2} \ln(n) + \frac{1}{2} \ln(2\pi) + o(1)$, on trouve $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) = \ln(2\pi) - 2 \ln(2)$

Exercice 44 [sujet] 1. Sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on a $0 \leq \sin x \leq x$ donc $0 \leq u_{n+1} \leq u_n$; la suite (u_n) est donc CV vers l tel que $l = \sin(l)$ (car $\sin$ est $\mathcal{C}^0$) donc $l = 0$ (étudier $x \mapsto x - \sin x$).

2. $\sum u_{n+1} - u_n$ CV (télescopique) et comme u_n tend vers 0, on a $u_{n+1} - u_n \sim -\frac{1}{6}u_n^3$ (négatif) donc $\sum u_n^3$ CV.
3. $\ln \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)$ est une série télescopique DV puisque $(\ln(u_n))$ DV vers $-\infty$. Comme (u_n) tend vers 0, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{u_n^2}{6} + o(u_n^2)$ donc $\ln \frac{u_{n+1}}{u_n} \sim -\frac{1}{6}u_n^2$ négatif donc $\sum u_n^2$ DV aussi.

Exercice 45 [sujet] 1. $u_{n+1} = 2 \sin^2 \frac{u_n}{2}$ donc avec $0 \leq \sin x \leq x$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on a $0 \leq u_{n+1} \leq \frac{1}{2}u_n^2 \leq 12u_n$ puisque $u_n \in [0, 1]$ pour $n \geq 1$. La suite (u_n) CV donc vers l tel que $l = 1 - \cos(l)$ (car $\cos$ est $\mathcal{C}^0$) et $l = 0$ (étude de fonction).

2. On a $0 \leq u_{n+1} \leq \frac{1}{2}u_n^2$ donc par encadrement $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et $\sum u_n$ CV (d'Alembert).

Exercice 46 [sujet] 1. On vérifie successivement que $u_n \geq 0$ donc $0 \leq u_n \leq \frac{1}{n}$ pour $n \geq 1$ donc (u_n) tend vers 0. On en déduit $nu_n \rightarrow 1$

2. On en déduit $u_n \sim \frac{1}{n}$ positif et $\sum u_n$ DV. Enfin avec $u_n = \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$, on trouve $u_{n+1} = \frac{1}{n} \left(1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$ donc $(-1)^n u_n = \frac{(-1)^n}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ et $\sum (-1)^n u_n$ CV.

Exercice 47 [sujet] Sur $[0, 1]$, stable, $f : x \mapsto \sqrt{\frac{x+1}{2}}$ est croissante donc (x_n) est monotone, bornée donc CV vers ℓ tel que $\ell = f(\ell)$ donc $\ell = 1$.

On a $u_{n+1} = 1 - \sqrt{1 - \frac{u_n}{2}} = \frac{u_n/2}{1 + \sqrt{1 + u_n/2}}$ donc $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{4} < 1$ et $\sum u_n$ CV

Exercice 48 [sujet] 1. $x_{n+1} - x_n = \frac{1}{x_n} > 0$ donc (x_n) croît et ne peut pas CV vers l car $l = l + \frac{1}{l}$ n'a pas de solution positive; (u_n) tend donc vers $+\infty$. Comme $\frac{1}{x_n} = x_{n+1} - x_n$, la série $\sum \frac{1}{x_n}$ DV.

2. On a $x_{n+1}^2 - x_n^2 = 2 + \frac{1}{x_n^2}$ donc en sommant, $x_{n+1}^2 = 2(n+1) + x_0^2 + \sum_{k=0}^n \frac{1}{x_k^2}$.

3. On a donc (pour $n \geq 1$) $x_n^2 \geq 2n$ puis $0 \leq \frac{1}{x_n^2} \leq \frac{1}{2n}$ et $0 \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k^2} \leq \frac{1}{2} H_n \sim \frac{1}{2} \ln(n)$. On a donc $x_{n+1} = 2(n+1) + x_0^2 + O(\ln(n))$ et $x_n \sim 2n$.

Exercice 49 [sujet] Si $\sum u_n$ CV, $v_{n+1} - v_n = \frac{\sqrt{u_n + v_n^2} - v_n}{2} = \frac{u_n}{2(\sqrt{u_n + v_n^2} + v_n)}$ donc (v_n) croît et $0 \leq v_{n+1} - v_n \leq \frac{u_n}{2v_0}$ donc $\sum (v_{n+1} - v_n)$ CV, ie (v_n) CV.

Si (v_n) CV vers l , elle reste croissante et $u_n = 4v_{n+1}(v_{n+1} - v_n) \leq 4l(v_{n+1} - v_n)$; $\sum (v_{n+1} - v_n)$ CV donc par majoration de SATP, $\sum u_n$ CV.

Exercice 50 [sujet] 1. $u_{n+1} - u_n = \frac{\sqrt{u_n^2 + a_n^2} - u_n}{2}$ puis $\sqrt{u_n^2 + a_n^2} \leq a_n + u_n$ car $a_n u_n \geq 0$ (élever au carré)

2. On a aussi $u_{n+1} - u_n \geq 0$ donc le th de comp pour les séries à termes positifs donne $\sum (u_{n+1} - u_n)$ CV

3. (u_n) CV (vers 1) et on a $a_n^2 = (2u_{n+1} - u_n)^2 - u_n^2 = 4u_{n+1}(u_{n+1} - u_n)$ ce qui donne $a_n \sim \frac{2}{n}$ (positif) donc $\sum a_n$ DV

Exercice 51 [sujet] On a $\sum_{k=1}^n k(u_k - u_{k+1}) = \sum_{k=1}^n u_k - n u_{n+1} \leq \sum_{k=1}^n u_k$ donc si $\sum u_n$ CV, on a $\sum_{k=1}^n k(u_k - u_{k+1}) \leq \sum_{k=1}^{+\infty} u_k$ donc les sommes partielles de la SATP $\sum n(u_n - u_{n+1})$ sont majorées donc elle CV.

Si on suppose que $\sum n(u_n - u_{n+1})$ CV alors $0 \leq n u_n = n \sum_{k=n}^{+\infty} (u_k - u_{k+1}) \leq \sum_{k=n}^{+\infty} k(u_k - u_{k+1}) \rightarrow 0$ donc $(n u_n)$ tend vers 0, ce qui donne la CV de $\sum u_n$ et aussi l'égalité des sommes en même temps.

Exercice 52 [sujet] 1. a) $\sum u_n$ est ACV donc U_n existe. Pour $\varepsilon > 0$, il existe n_0 tel que $n \geq n_0 \Rightarrow |u_n| \leq v_n$ donc en sommant, pour $n \geq n_0$, on a $|U_n| \leq \sum_{k=n}^{+\infty} |u_k| \leq \varepsilon V_n$ ce qui est la définition de $U_n = o(V_n)$.

b) On a $u_n - v_n = o(v_n)$ et $\sum u_n$ CV (SATP par équivalent). On applique la première question et on en déduit $U_n - V_n = o(V_n)$ donc $U_n \sim V_n$.

2. a) Avec la question précédente, $R_n \sim \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=n}^{+\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \frac{1}{n}$

b) $u_n = a_{n+1} - a_n = 1 - \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \sim \frac{-1}{12n^2}$ donc avec 1, on a $\sum_{k=n}^{+\infty} (a_{k+1} - a_k) \sim \frac{-1}{12} R_n \sim \frac{-1}{12n}$ donc, comme $\lim a_n = \frac{1}{2} \ln(2\pi)$, on a $\frac{1}{2} \ln(2\pi) - a_n = \frac{-1}{12n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$

c) $a_n = \exp\left[\frac{1}{2} \ln(2\pi) + \frac{1}{12n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right] = \sqrt{2\pi} \left(1 + \frac{1}{12n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$ donc $n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} \left(1 + \frac{1}{12n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$.

Exercice 53 [sujet] Soit $n \in \mathbb{N}$, il existe N tel que $\sigma(\llbracket 0, n \rrbracket) \subset \llbracket 0, N \rrbracket$; comme $u_k \geq 0$, on a $\sum_{k=0}^n a_{\sigma(k)} \leq \sum_{k=1}^N a_k$ donc si on suppose que $\sum a_n$ CV, on a $\sum_{k=0}^n a_{\sigma(k)} \leq \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$; par majoration des sommes partielles d'une SATP, $\sum a_{\sigma(n)}$ CV et $\sum_{n=0}^{+\infty} a_{\sigma(n)} \leq \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$. En utilisant σ^{-1} , on trouve l'implication inverse et l'inégalité inverse.

Exercice 54 [sujet] 1. $\ln(P_n) = \sum_{k=1}^n \ln(1 + u_k)$ et comme (u_n) tend vers 0, $\ln(1 + u_n) \sim u_n$ donc $\sum \ln(1 + u_n)$ est ACV; toute série ACV étant CV, $(\ln P_n)$ est une suite CV donc (P_n) CV.

2. $|P_{n+1} - P_n| \leq |u_{n+1}| \prod_{k=1}^n (1 + |u_k|)$. En appliquant la première question à la suite $(|u_n|)$, on trouve que $\prod_{k=1}^n (1 + |u_k|)$ est le terme général d'une suite CV donc bornée (par M). On en déduit $|P_{n+1} - P_n| \leq M|u_{n+1}|$ donc $\sum (P_{n+1} - P_n)$ est ACV donc CV et (P_n) CV.

Exercice 55 [sujet] 1. $\frac{1}{n} \ln(u_n) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \left(\frac{k}{n} \right)^2 \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \ln(1 + x^2) dx > 0$ car $x \mapsto \ln(1 + x^2)$ est $\mathcal{C}^0$ sur $[0, 1]$ (somme de Riemann), on en déduit $\lim u_n = +\infty$.

2. Par comparaison série/intégrale, $\sum_{k=1}^n k^\alpha \sim \frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ donc $a_n \sim \frac{1}{(\alpha+1)n^{1-\alpha}}$.

3. On a $0 \leq \ln(u_n) = a_n$ donc si $\alpha \in [0, 1[$, $(\ln u_n)$ tend vers 0 donc (u_n) tend vers 1.

Reste le cas $\alpha = 1$: on vérifie que $|\ln(1+x) - x| \leq x^2$ si $x \in [0, r]$ donc pour $\frac{1}{n} \leq r$, on a $\left| \ln \left(1 + \frac{k}{n^2} \right) - \frac{k}{n^2} \right| \leq \frac{k^2}{n^4} \leq \frac{1}{n^2}$ puis en sommant (par inégalité triangulaire) $|\ln u_n - a_n| \leq \frac{1}{n^2}$ ce qui donne $\lim \ln u_n = \lim a_n = \frac{1}{2}$ donc $\lim u_n = \sqrt{e}$.

Exercice 56 [sujet] On a une SATP donc il suffit de majorer les sommes partielles: $S_n \leq S_{2^n} \leq \prod_{k=0}^{n-1} \left(1 + \frac{1}{2^k} \right) S_1 = P_n S_1$; comme $\ln P_n = \sum_{k=0}^{n-1} \ln \left(1 + \frac{1}{2^k} \right)$ et $\ln \left(1 + \frac{1}{2^k} \right) \sim \frac{1}{2^k}$, $(\ln P_n)$ CV donc est bornée puis $\sum u_n$ CV.

Exercice 57 [sujet] 1. $\ln u_n = \sum_{k=2}^n \ln \left(1 - \frac{1}{\sqrt{k}} \right)$ et $\ln \left(1 - \frac{1}{\sqrt{k}} \right) \sim -\frac{1}{\sqrt{k}}$ négatif donc $\ln u_n$ est la somme partielle d'une série à termes négatifs DV donc $\lim \ln u_n = -\infty$ puis $\lim u_n = 0$.

2. On a $\ln(n^2 u_n) = 2 \ln(n) + \sum_{k=2}^n \ln \left(1 - \frac{1}{\sqrt{k}} \right) \leq 2 \ln(n) - \sum_{k=2}^n \frac{1}{\sqrt{k}}$ et comme (comparaison série/intégrale) $\sum_{k=2}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \sim 2\sqrt{n}$, on a $\lim \ln(n^2 u_n) = -\infty$, ie $u_n = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc $\sum u_n$ est ACV.

Exercice 58 [sujet] 1. En développant par la dernière colonne, puis en développant le deuxième déterminant qui apparaît par la dernière ligne, on trouve $\Delta_n = \Delta_{n+1} + a_n \Delta_{n-2}$

2. par récurrence (double)

3. (Δ_n) est croissante; si $\sum a_n$ CV alors $\ln \Delta_n \leq \sum_{k=1}^n \ln(1 + a_k)$ puis (a_n) tend vers 0 donc $\ln(1 + a_k) \sim a_k$ (positif)

donc $\sum \ln(1 + a_k)$ CV et $\ln \Delta_n \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \ln(1 + a_n)$ donc (Δ_n) est majorée donc CV.

Si (Δ_n) CV vers ℓ alors $\ell > 0$ (car croissante) et $\sum (\Delta_n - \Delta_{n-1})$ CV; or $\Delta_n - \Delta_{n-1} = a_n \Delta_{n-2} \sim \ell a_n$ (positif) donc $\sum a_n$ CV

Exercice 59 [sujet] 1. On a $b_n \geq 2$ pour $n \geq n_0$ donc $0 \leq \frac{1}{n^{b_n}} \leq \frac{1}{n^2}$.

2. Si $a_n = \ln n$ et $b_n = \ln(\ln n)$ alors $\frac{n}{a_n^{b_n}} = \exp[\ln n \left(1 - \frac{(\ln(\ln n))^2}{\ln n} \right)] \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ donc $\frac{1}{n} = o\left(\frac{1}{a_n^{b_n}}\right)$ et $\sum \frac{1}{a_n^{b_n}}$ DV.

Exercice 60 [sujet] Par un DL, on trouve $\ln(v_{n+1}) - \ln(v_n) = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc $\sum (\ln(v_{n+1}) - \ln(v_n))$ est ACV et la suite $(\ln v_n)$ CV vers $l \in \mathbb{R}$ et $\lim v_n = e^l > 0$ donc $u_n \sim \frac{e^l}{n^\alpha}$ positif donc $\sum u_n$ CV si et seulement si $\alpha > 1$.

Exercice 61 [sujet] 1. Partir de $v_n = V_n - V_{n-1}$ ou par récurrence.

2. Si $|V_n| \leq M$ alors $|(u_k - u_{k+1})V_k| \leq M(u_k - u_{k+1})$ puisque (u_n) décroît ; comme (u_n) CV, la série $\sum (u_n - u_{n+1})$ CV et par majoration $\sum (u_n - u_{n+1})V_n$ est ACV. De plus $\lim u_n V_n = 0$ puisque (u_n) tend vers 0 et (V_n) est bornée ; on a donc la CV de $\sum u_n v_n$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n v_n = \sum_{n=1}^{+\infty} (u_n - u_{n+1})V_n$.

3. Si $\alpha \leq 0$, on a DVG ; par contre si $\alpha > 0$, $\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$ tend vers 0 en décroissant et $V_n = \sum_{k=1}^n \cos(n\theta) = \frac{\cos \frac{n+1}{2}\theta \sin \frac{n\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}}$ si $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$ donc $|V_n| \leq \frac{2}{\left|\sin \frac{\theta}{2}\right|}$, ie (V_n) est bornée et $\sum \frac{\cos(n\theta)}{n^\alpha}$ CV. Enfin, si $\theta \in 2\pi\mathbb{Z}$ alors $\frac{\cos(n\theta)}{n^\alpha} = \frac{1}{n^\alpha}$ donc la série CV si et seulement si $\alpha > 1$.

Exercice 62 [sujet] Pour $\varepsilon > 0$, on a $|u_n - v_n| \leq \varepsilon v_n$ pour $n \geq n_0$.

1. Pour $n \geq n_0$, on a $|U_n - V_n| \leq |U_{n_0} - V_{n_0}| + \varepsilon \sum_{k=n_0+1}^n v_k \leq |U_{n_0} - V_{n_0}| + \varepsilon V_n$; comme $\lim V_n = +\infty$ (somme partielle d'une SATP DV), il existe $n_1 \geq n_0$ tel que pour $n \geq n_1$, $\frac{|U_{n_0} - V_{n_0}|}{V_n} \leq \varepsilon$ (le numérateur est une constante). Pour $n \geq n_1$, on a $\frac{|U_n - V_n|}{V_n} \leq 2\varepsilon$ donc $\lim \frac{|U_n - V_n|}{V_n} = 0$ ce qui donne $U_n \sim V_n$.
2. Pour $n \geq n_0$, on a $|R_n - R'_n| \leq \varepsilon R'_n$ donc $R_n \sim R'_n$.