

Partie I

1. P est bien à coefficients strictement positifs et on vérifie $P \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc $P \in \mathcal{ST}_3^+$

2. a) On vérifie $\ker(B - I_3) = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ puis $\ker(B - 3I_3) = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$ et $\ker(B - 6I_3) = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.
 Si $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ alors $\det(Q) = 6$ donc Q est inversible et la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. On en déduit $\mathbb{R}^3 = \ker(B - I_3) \oplus \ker(B - 3I_3) \oplus \ker(B - 6I_3)$

- b) D'après le choix des vecteurs colonne de Q , on a $B = Q \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} Q^{-1}$ donc $P = QDQ^{-1}$

- c) On vérifie, pour $j \in \mathbb{N}$, $D^j = \begin{pmatrix} 6^{-j} & 0 & 0 \\ 0 & 2^{-j} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ donc $\frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} D^j = \begin{pmatrix} \frac{6}{5k}(1 - 6^{-k}) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{k}(1 - 2^{-k}) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et on obtient $\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} D^j = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3. a) Il s'agit d'un des polynômes interpolateurs de Lagrange $L = \frac{(X - 1/6)(X - 1/2)}{(1 - 1/6)(1 - 1/2)} = \frac{1}{5}(6X - 1)(2X - 1)$

- b) On a $L(P) = QL(D)Q^{-1}$ et $L(D) = \begin{pmatrix} L(1/6) & 0 & 0 \\ 0 & L(1/2) & 0 \\ 0 & 0 & L(1) \end{pmatrix} = \Delta$ donc $L(P) = Q\Delta Q^{-1}$. On calcule par ailleurs $L(P) = \frac{1}{5}(6P - I_3)(2P - I_2) = \frac{1}{15}(B - I_3)(B - 3I_3) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

4. a) On vérifie $AA' = A'A = Q \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} Q^{-1}$

- b) On en déduit $AA'A = A$ et $A'AA' = A'$

- c) $I_3 - AA' = Q \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} Q^{-1} = Q\Delta Q^{-1}$ donc $I_3 - AA' = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

5. On a $(A - I_2)(A - \lambda I_2) = \begin{pmatrix} -\alpha & \alpha \\ \beta & -\beta \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \beta & \alpha \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$ donc $(A - I_2)(A - \lambda I_2) = 0$

6. On prouve le résultat par récurrence sur k :
 — $\frac{1 - \lambda^1}{1 - \lambda}A + \frac{\lambda - \lambda^1}{\lambda - 1}I_2 = A$ donc l'égalité est vérifiée pour $k = 1$.
 — si on suppose l'égalité vérifiée au rang k alors on a $A^{k+1} = A^k \times A \stackrel{\text{HR}}{=} \frac{1 - \lambda^k}{1 - \lambda}A^2 + \frac{\lambda - \lambda^k}{\lambda - 1}A$ et, avec la question précédente, on a $A^2 = (1 + \lambda)A - \lambda I_2$ donc $A^{k+1} = \left(\frac{\lambda - \lambda^k}{\lambda - 1} + (1 + \lambda)\frac{1 - \lambda^k}{1 - \lambda} \right) A - \lambda \frac{1 - \lambda^k}{1 - \lambda} I_2$, ce qui donne le résultat au rang $k + 1$ car $\frac{\lambda - \lambda^k}{\lambda - 1} + (1 + \lambda)\frac{1 - \lambda^k}{1 - \lambda} = \frac{1 - \lambda^{k+1}}{1 - \lambda}$ et $-\lambda \frac{1 - \lambda^k}{1 - \lambda} = \frac{\lambda - \lambda^{k+1}}{\lambda - 1}$
Ce résultat peut aussi se démontrer en déterminant le reste de la division euclidienne du polynôme X^k par le polynôme $(X - 1)(X - \lambda)$ qui est annulateur de A .

7. On commence par remarquer que $\alpha + \beta \in]0, 2]$ donc $\lambda \in [-1, 1[$ avec $\lambda = -1 \Leftrightarrow \alpha = \beta = 1$.
 Ainsi, si $(\alpha, \beta) \neq (1, 1)$ on a $|\lambda| < 1$ donc $\lim_{k \rightarrow +\infty} A^k = \frac{1}{1 - \lambda}(A - \lambda I_2)$, ie $L(\alpha, \beta) = \frac{1}{\alpha + \beta} \begin{pmatrix} \beta & \alpha \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$

Si $(\alpha, \beta) = (1, 1)$ alors $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $A^2 = I_2$ donc $A^{2k} = I_2$ et $A^{2k+1} = A$ donc la suite $(A(1, 1)^k)_{k \in \mathbb{N}}$ ne converge pas.

$$8. \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} A^j = \frac{1}{k} \left(\sum_{j=0}^{k-1} \frac{1 - \lambda^j}{1 - \lambda} \right) A + \frac{1}{k} \left(\sum_{j=0}^{k-1} \frac{\lambda - \lambda^j}{\lambda - 1} \right) I_2 \text{ puis, comme } \lambda \neq 1, \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1 - \lambda^j}{1 - \lambda} = \frac{1}{k(1 - \lambda)} \left(k - \frac{1 - \lambda^k}{1 - \lambda} \right)$$

$$\text{donc } \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1 - \lambda^j}{1 - \lambda} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 - \lambda}; \text{ de même } \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} \frac{\lambda - \lambda^j}{\lambda - 1} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \frac{\lambda}{\lambda - 1} \text{ donc } \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} A^j = \frac{1}{1 - \lambda} A + \frac{\lambda}{\lambda - 1} I_2$$

$$\text{donc } \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} A(\alpha, \beta)^j = L(\alpha, \beta)$$

$$\text{Si } (\alpha, \beta) = (1, 1) \text{ alors } \frac{1}{2k} \sum_{j=0}^{2k-1} A^j = \frac{1}{2k} \sum_{j=0}^{k-1} A^{2j} + \frac{1}{2k} \sum_{j=0}^{k-1} A^{2j+1} = \frac{1}{2k} \sum_{j=0}^{k-1} I_2 + \frac{1}{2k} \sum_{j=0}^{k-1} A = \frac{1}{2k} \begin{pmatrix} k & k \\ k & k \end{pmatrix} \text{ donc}$$

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{2k} \sum_{j=0}^{2k-1} A^j = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \text{ De même, } \frac{1}{2k+1} \sum_{j=0}^{2k} A^j = \frac{1}{2k+1} \begin{pmatrix} k+1 & k \\ k & k+1 \end{pmatrix} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Les deux suites extraites des termes pairs et impairs de la suite $\left(\frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} A^j \right)_{k \in \mathbb{N}^*}$ convergent vers la même limite

$$\text{donc } \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} A(1, 1)^j = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Partie II

1. a) On a $(MN)_{i,j} = \sum_{k=1}^n m_{i,k} n_{k,j} \geq 0$ car les coefficients de M et N sont positifs; de plus $(MN)X_n = M(NX_n)$ donc $(MN)X_n = MX_n = X_n$ donc $MN \in \mathcal{ST}_n$. La valeur des coefficients de MN prouve aussi que si les coefficients de M et N sont strictement positifs alors ceux de MN le sont aussi : $\mathcal{ST}_n$ et $\mathcal{ST}_n^+$ sont stables par produit
- b) La matrice nulle n'appartient ni à $\mathcal{ST}_n$, ni à $\mathcal{ST}_n^+$ car $0X_n = 0 \neq X_n$ donc $\mathcal{ST}_n$ et $\mathcal{ST}_n^+$ ne sont pas des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
2. a) On a $MX_n = X_n$ et $(MX_n)_i = \sum_{k=1}^n m_{i,k} \times 1$ donc, en identifiant les coordonnées entre les vecteurs MX_n et X_n , on a $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \sum_{k=1}^n m_{i,k} = 1$
- b) On a donc $\sum_{j=1}^n m_{i_0,j}(x_{i_0} - x_j) = x_{i_0} \sum_{j=1}^n m_{i_0,j} - \sum_{j=1}^n m_{i_0,j} x_j = x_{i_0} - (MX)_{i_0} = 0$ puisque $MX = X$.
- c) Puisque, par définition de i_0 , on a $|x_j| \leq |x_{i_0}|$ et $m_{i_0,j} \geq 0$, tous les termes de la somme précédente sont du même signe (positifs si $x_{i_0} \geq 0$ et négatifs si $x_{i_0} \leq 0$). Comme la somme est nulle, tous les termes sont donc nuls. On a $\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, m_{i_0,j}(x_{i_0} - x_j) = 0$, ce qui donne $x_j = x_{i_0}$ car $m_{i_0,j} > 0$. Toutes les coordonnées de X sont donc égales à x_{i_0} et $X = x_{i_0} X_n$, ie $X \in \text{Vect}\{X_n\}$
- d) On vient de prouver $\ker(I_n - M) \subset \text{Vect}\{X_n\}$; réciproquement, comme M est stochastique, on a $MX_n = X_n$ donc $X_n \in \ker(I_n - M)$ et $\ker(I_n - M) = \text{Vect}\{X_n\}$. Avec $X_n \neq 0$, on en déduit $\dim(\ker(I_n - M)) = 1$ et avec le théorème du rang $\text{rg}(I_n - M) = n - 1$

Partie III

1. On fait une preuve d'équivalences « circulaire » :
 - i) $\Rightarrow$ ii) On a $\ker(a) \subset \ker(a^2)$, et si $\text{rg}(a) = \text{rg}(a^2)$, d'après la formule du rang, on a $\dim \ker(a) = \dim \ker(a^2)$ donc $\ker(a) = \ker(a^2)$.
 - ii) $\Rightarrow$ iii) Si $x \in \ker(a) \cap \text{Im}(a)$, on a $x = a(x')$ pour un $x' \in E$ et $0 = a(x) = a^2(x')$ donc $x' \in \ker(a^2) = \ker(a)$. Ainsi, $x = a(x') = 0$ donc $\ker(a) \cap \text{Im}(a) = \{0\}$. Puis d'après la formule du rang, on a $E = \text{Im}(a) \oplus \ker(a)$.
 - iii) $\Rightarrow$ iv) Dans une base $\mathcal{B}$ adaptée à la décomposition $E = \text{Im}(a) \oplus \ker(a)$, on a $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(a) = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ car $\text{Im}(a)$ est stable par a , avec $B \in \mathcal{M}_r(\mathbb{R})$ où $r = \dim(\text{Im}(a)) = \text{rg}(a)$. On a alors $\text{rg}(a) = r = \text{rg}(B)$ donc B est inversible. On a donc iv) avec Q la matrice de passage de la base canonique de E à la base $\mathcal{B}$.

iv)⇒i) On a $\text{rg}(a) = \text{rg}(A) \stackrel{Q_{\text{inv}}}{=} \text{rg} \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{rg}(B) = r$ car B est inversible et, comme $A^2 = Q \begin{pmatrix} B^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q^{-1}$, on a $\text{rg}(a^2) = \text{rg}(A^2) \stackrel{Q_{\text{inv}}}{=} \text{rg} \begin{pmatrix} B^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{rg}(B^2) = r$ car B^2 est inversible.

2. a) On a $\text{rg}(A^2) \leq \text{rg}(A)$ et si A admet un pseudo-inverse A' alors $A = AA'A$ et $AA' = A'A$ donc $A = A^2A'$ puis $\text{rg}(A) \leq \min(\text{rg}(A'), \text{rg}(A^2)) \leq \text{rg}(A^2)$ donc $\boxed{\text{rg}(A) = \text{rg}(A^2)}$

b) Si $A = Q \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q^{-1}$ avec Q et B inversibles, il suffit de prendre $\boxed{A' = Q \begin{pmatrix} B^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q^{-1}}$

3. a) a et a'' commutent donc $\boxed{\ker(a) \text{ et } \text{Im}(a) \text{ sont stables par } a''}$

b) Si $A = Q \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q^{-1}$, alors Q est la matrice de passage de la base canonique à une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(a) = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Ainsi, si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_r, e_{r+1}, \dots, e_n)$, comme B est inversible, on a :

$\ker(a) = \text{Vect}\{e_{r+1}, \dots, e_n\}$ et $\text{Im}(a) = \text{Vect}\{e_1, \dots, e_r\}$. (Ce qui prouve en fait qu'une telle base est obligatoirement une base adaptée à la décomposition $E = \text{Im}(a) \oplus \ker(a)$.)

Comme $\ker(a)$ et $\text{Im}(a)$ sont stables par a'' , la matrice de a'' dans $\mathcal{B}$ est diagonale par blocs :

$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(a'') = \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & D' \end{pmatrix}$. Enfin, on vérifie que si $A'' = A''AA''$, on a $D' = 0$ donc $\boxed{A'' = Q \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q^{-1}}$

c) Si $A = AA''A$, alors $AA'' = AA''AA'' = (AA'')^2$ donc $\boxed{a \circ a'' \text{ est un projecteur}}$

On a $\ker(a) \subset \ker(a'' \circ a)$ et comme $a = a \circ (a'' \circ a)$, on a $\ker(a'' \circ a) \subset \ker(a)$ donc $\boxed{\ker(a \circ a'') = \ker(a)}$ car $a \circ a'' = a'' \circ a$.

De même, $\text{Im}(a \circ a'') \subset \text{Im}(a)$ et comme $a = (a \circ a'') \circ a$, on a $\text{Im}(a) \subset \text{Im}(a \circ a'')$ puis $\boxed{\text{Im}(a) = \text{Im}(a \circ a'')}$ (on peut aussi montrer une inclusion et utiliser la formule du rang en repartant de l'égalité des noyaux.)

On a $\boxed{Q^{-1}(AA'')Q = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}$ car c'est la matrice du projecteur $a \circ a''$ écrite dans une base adaptée à la décomposition $E = \text{Im}(a \circ a'') \oplus \ker(a \circ a'')$.

d) On en déduit que $BD = I_r$ donc $D = B^{-1}$ et l'unique pseudo-inverse est celui obtenu à la question **III.2.b**.

4. On détermine des bases de $\ker(a)$ et $\text{Im}(a)$: par exemple $((1, 1, 1), (0, 1, 0))$ est une base de $\text{Im}(a)$ et $(0, 1, -1)$ un vecteur directeur de $\ker(a)$. On pose $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ qui est inversible (ce qui signifie que $E = \text{Im}(a) \oplus \ker(a)$)

et assure donc l'existence du pseudo-inverse). On a $Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc $A' = Q \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -2 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} Q^{-1}$

On conclut donc $\boxed{A' = \begin{pmatrix} -5 & 3 & 3 \\ 7 & -4 & -4 \\ -5 & 3 & 3 \end{pmatrix}}$ car $Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Partie IV

1. D'après la partie **II**, on a $\boxed{\text{rg}(A) = n - 1}$

2. On utilise l'égalité de polynômes $\left(\sum_{j=0}^{k-1} X^j\right)(1 - X) = 1 - X^k$ et on l'applique à la matrice $I_n - C$: on en déduit

$\left(\sum_{j=0}^{k-1} (I_n - C)^j\right)(I_n - (I_n - C)) = I_n - (I_n - C)^k$ donc $\left(\sum_{j=0}^{k-1} (I_n - C)^j\right)C = I_n - (I_n - C)^k$. La matrice C étant inversible, il suffit alors de multiplier cette égalité à droite par C^{-1} .

3. Avec les notations de la partie **III**, avec $r = \text{rg}(A) = n - 1$: $A = Q \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q^{-1}$ donc $P = Q \begin{pmatrix} I_{n-1} - B & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} Q^{-1}$

et $P^j = Q \begin{pmatrix} (I_{n-1} - B)^j & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} Q^{-1}$ puis $\sum_{j=0}^{k-1} P^j = Q \begin{pmatrix} \sum_{j=0}^{k-1} (I_{n-1} - B)^j & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} Q^{-1}$. La matrice B étant inversible,

on peut utiliser le résultat de **IV.2**, ce qui donne $\sum_{j=0}^{k-1} P^j = Q \begin{pmatrix} (I_{n-1} - (I_{n-1} - B)^k)B^{-1} & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} Q^{-1}$. D'autre part,

$$(I_n - P^k)A' = Q \begin{pmatrix} I_{n-1} - (I_{n-1} - B)^k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q^{-1} \times Q \begin{pmatrix} B^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q^{-1} = Q \begin{pmatrix} (I_{n-1} - (I_{n-1} - B)^k)B^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q^{-1} \text{ et}$$

$$k(I_n - AA') = kI_n - kQ \begin{pmatrix} I_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q^{-1} = Q \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} Q^{-1} \text{ ce qui donne } \boxed{\sum_{j=0}^{k-1} P^j = (I_n - P^k)A' + k(I_n - AA')}$$

4. On en déduit $\frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} P^j = (I_n - AA') + \frac{1}{k}A' - \frac{1}{k}P^k A'$. Comme A' est constante, on a $\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{k}A' = 0$. De plus,

$\mathcal{ST}_n$ étant stable par produit, P^k est aussi stochastique donc tous ses coefficients sont dans $[0, 1]$ (donc bornés) et

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{k}P^k = 0. \text{ On en déduit donc } \boxed{\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} P^j = I_n - AA'}$$

5. Les coefficients de P étant positifs, ceux de P^j aussi (avec la formule du produit matriciel) donc ceux de $\frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} P^j$

le sont aussi. Par passage à la limite, les coefficient de $I_n - AA'$ sont donc positifs (mais pas forcément strictement positifs puisque le passage à la limite ne conserve pas les inégalités strictes).

De plus on a $PX_n = X_n$ donc $P^j X_n = X_n$ et $\left(\frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} P^j \right) X_n = X_n$; on vérifie alors que, les coefficients de X_n

ne dépendant pas de k , $\lim_{k \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} P^j \right) X_n = (I_n - AA')X_n$ (pour une preuve rigoureuse, il suffit d'introduire

les coefficients de la matrice $\frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} P^j$ et effectuer la produit matriciel avec X_n) et donc $(I_n - AA')X_n = X_n$ et

$$\boxed{I_n - AA' \in \mathcal{ST}_n}$$

En développant, on a $(I_n - AA')A = A - AA'A = 0$.

6. La dernière égalité prouve que $\text{Im}(A) \subset \ker(I_n - AA')$ donc $\dim(\ker(I_n - AA')) \geq \text{rg}(A) = n-1$ et $\text{rg}(I_n - AA') \leq 1$. De plus $X_n = (I_n - AA')X_n \in \text{Im}(I_n - AA')$ donc $\text{rg}(A_n - AA') = 1$ et $\text{Im}(I_n - AA') = \text{Vect}\{X_n\}$ (car $X_n \neq 0$).

Les colonnes de $I_n - AA'$ sont donc de la forme $y_j X_n$ avec $y_j \in \mathbb{R}$. Il suffit alors de poser $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ pour avoir

$$\boxed{I_n - AA' = X_n Y^T} \text{ et on a bien } Y \neq 0 \text{ sinon } I_n - AA' \text{ serait nulle donc pas stochastique.}$$

On pouvait aussi utiliser les résultats de la partie III qui assurent que $I_n - AA'$ est la matrice du projecteur sur $\ker(A)$ parallèlement à $\text{Im}(A)$, donc de rang 1.