

Exercice 1 (CCINP PSI 2018)

Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $f(M) = M + \text{Tr}(M)A$.

1. Trouver un polynôme annulateur de f . (*)
2. Montrer que f est bijectif dès que $\text{Tr}(A) \neq -1$.
3. On suppose $\text{Tr}(A) = -1$. Donner $\ker(f)$ et montrer que $\text{Im}(f)$ est l'ensemble des matrices de trace nulle.
4. Résoudre l'équation $X + (\text{Tr } X)A = B$ d'inconnue X .

Exercice 2 (CCP PSI 2018)

Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note $\Delta_A = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), M + M^T = \text{Tr}(M)A\}$, $\mathcal{S}_n$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n$ celui des matrices antisymétriques.

1. Montrer que Δ_A est un espace vectoriel.
2. Si $\text{Tr}(A) \neq 2$, montrer que $\Delta_A = \mathcal{A}_n$. (*)
3. Déterminer Δ_A si $\text{Tr}(A) = 2$ et $A \notin \mathcal{S}_n$. (*)
4. Si $A \in \mathcal{S}_n$ et $\text{Tr}(A) = 2$, déterminer $\Delta_A \cap \mathcal{S}_n$ et en déduire Δ_A . (*)

Exercice 3 (CCP PSI 2016)

On pose $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ avec $m_{i,j} = \begin{cases} b & \text{si } j > i \\ a & \text{si } i > j \\ r_i & \text{si } i = j \end{cases}$ où $(r_1, \dots, r_n) \in \mathbb{K}^n$ et on note J la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent 1.

1. Montrer que $x \mapsto \det(M + xJ)$ est une fonction affine (polynômiale de degré ≤ 1). (*)
2. En déduire, lorsque $a \neq b$, la valeur de $\det(M + xJ)$ puis de $\det(M)$. (*)

Exercice 4 (Mines-Ponts PSI 2023)

Soient $z \in \mathbb{C}$ et $k \in \llbracket 0, n-2 \rrbracket$. Déterminer la valeur de
$$\begin{vmatrix} (z+1)^k & 2^k & 3^k & \dots & n^k \\ (z+2)^k & 3^k & 4^k & \dots & (n+1)^k \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ (z+n)^k & (n+1)^k & (n+2)^k & & (2n-1)^k \end{vmatrix}. \quad (*)$$

Exercice 5 (Centrale PSI 2022)

Soient $P_0 = 1$ et $P_k = \prod_{i=0}^{k-1} (X - i)$ pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

1. Montrer que $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$
2. Soient $a_1, \dots, a_n$ des réels et $b_1, \dots, b_n$ des entiers naturels deux à deux distincts. On pose $Q(X) = \sum_{i=1}^n a_i X^{b_i}$ et on suppose qu'il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $Q = (X-1)^n P$.
Calculer $\sum_{i=1}^n a_i P_k(b_i)$ pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. (*)

3. On pose $B_i = \begin{pmatrix} 1 \\ b_i \\ \vdots \\ b_i^n \end{pmatrix}$ et $S_n = \sum_{i=1}^n a_i B_i$. Calculer S_n en fonction de $n!P(1)$. (*)

4. En considérant le déterminant de $(S_n, B_1, \dots, B_n)$, calculer $P(1)$.

Exercice 6

Étudier, en fonction de $\alpha \in \mathbb{R}$, la nature de la série $\sum \left(\frac{1}{n!}\right)^{\frac{\alpha}{n}}$.

Exercice 7 (CCP PSI 2017)

On pose $a_n = \frac{1}{1^2 + 2^2 + \dots + n^2}$ et on rappelle $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

1. Montrer que $\sum a_n$ converge.
2. Soit $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (H_{2n+1} - H_n) = \ln 2$. (*)

3. Trouver $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $a_n = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} + \frac{c}{2n+1}$ et en déduire la valeur de $\sum_{n \geq 1} a_n$.

Exercice 8 (CCINP PSI 2022)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $0 < u_0 \leq \frac{\pi}{2}$ et $u_{n+1} = \sin(u_n)$.

1. Étudier la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et déterminer sa limite.
2. En calculant $u_{n+1} - u_n$, montrer que $\sum u_n^3$ converge.
3. Étudier la série de terme général u_n^2 . (*)

Exercice 9 (Centrale PSI 2023)

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ deux suites de réels strictement positifs. On pose $a_n = u_n v_n$ et on définit le déterminant Δ_n

$$\text{par : } \Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & -v_1 & & & \\ u_1 & 1 & -v_2 & (0) & \\ 0 & u_2 & \ddots & \ddots & \\ & (0) & \ddots & 1 & -v_n \\ & & & u_n & 1 \end{vmatrix}$$

1. Trouver une relation entre Δ_n , Δ_{n-1} et Δ_{n-2}
2. Montrer que $\Delta_n \leq \prod_{k=1}^n (1 + a_k)$
3. Montrer que la suite (Δ_n) converge si et seulement si $\sum a_n$ converge. (*)

Indications

Exercice 1

1. De degré 2 ; ne pas confondre un polynôme annulateur de f et de $f(M)$.

Exercice 2

2. En supposant que $M \in \Delta_A$, commencer par déterminer $\text{Tr}(M)$.
3. Transposer l'équation pour en obtenir une seconde.
4. Commencer par remarquer que $\Delta_A \cap \mathcal{S}_n$ est inclus dans une droite.

Exercice 3

1. Par manipulation sur les rangées, éliminer tous les termes x sauf 1 ; il ne s'agit pas de déterminer précisément les coefficients de ce polynôme pour le moment.
2. On a $\forall x \in \mathbb{R}, \det(M + xJ) = \alpha x + \beta$ donc deux inconnues α et β que l'on peut déterminer si on trouve deux valeurs de x pour lesquelles $\det(M + xJ)$ est facile à calculer.

Exercice 4

Vérifier que c'est une fonction polynomiale de la variable z et examiner son degré.

Exercice 5

2. Calculer $Q^{(k)}$ et distinguer $k \leq n-1$ et $k = n$.
3. Examiner les coordonnées de S_n , utiliser $X^j \in \text{Vect}\{P_0, \dots, P_j\}$ et la question précédente.

Exercice 7

2. Soit une somme de Riemann, soit une comparaison avec une intégrale, soit le développement vu en cours.

Exercice 8

3. Utiliser $\sum (\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n))$

Exercice 9

3. Remarquer que (Δ_n) est croissante puis prouver que si $\sum a_n$ converge alors $p_n = \prod_{k=1}^n (1 + a_k)$ définit une suite convergente