DM4

(Extrait de E3A PSI 2009 maths 2)

$\mathbb{R}$ est l'ensemble des nombres réels et n et n_0 sont des entiers naturels.
Cet exercice comporte deux parties. Dans la première partie, on établit un résultat général appelé : Règle de Raabe-Duhamel. Dans la deuxième partie on applique, sans omettre les justifications nécessaires, ce résultat à l'étude de plusieurs séries particulières.
Soit (α_n) une suite réelle.
On rappelle que la relation $\alpha = o\left(\frac{1}{n}\right)$ signifie que $\lim\limits_{n\to+\infty} n\alpha_n = 0$.

Partie A : règle de Raabe-Duhamel.

Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite de réels strictement positifs telle qu'il existe un réel λ vérifiant :

$$\forall n \geq n_0,\ \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\lambda}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

1. Prouver que si $\lambda < 0$, alors la série $\sum u_n$ diverge.

2. Soit β un réel quelconque et $v_n = \frac{1}{n^\beta}$. Montrer que $\frac{u_{n+1}}{u_n} - \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\mu}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ où μ est un réel, indépendant de n, à déterminer.

3. On suppose que $\lambda > 1$. On se propose de démontrer que la série $\sum u_n$ converge. On choisit β tel que $\lambda > \beta > 1$.

a) Justifier l'existence d'un entier naturel N tel que, pour $n \geq N$, on ait $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$.

b) Déterminer un réel positif K, indépendant de n, tel que pour $n \geq N$, on ait $u_n \leq K v_n$.

c) Prouver que la série $\sum u_n$ converge.

4. On suppose que $0 \leq \lambda < 1$. Démontrer par un raisonnement analogue à celui fait à la question précédente que la série $\sum u_n$ diverge (on choisira β de manière à ce que la série $\sum v_n$ diverge et que ceci implique la divergence de la série $\sum u_n$).

5. Pour $n \geq 2$, on pose $x_n = \frac{1}{n}$ et $y_n = \frac{1}{n\ln(n)^2}$. Déterminer la nature des séries $\sum x_n$ et $\sum y_n$ et en déduire que le cas $\lambda = 1$ est un cas douteux de la règle de Raabe-Duhamel.

Partie B :

Les trois questions qui suivent sont indépendantes les unes des autres et sont des applications directes ou partielles de la règle de Raabe-Duhamel.

1. Pour $n \geq 2$, on pose $w_n = \sqrt{(n-1)!}\prod\limits_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$. Déterminer la nature de la série $\sum w_n$.

2. Pour $n \geq 1$, on considère l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(t^4+1)^n}$.

a) Montrer que cette intégrale généralisée converge. On note I_n sa valeur.

b) Etablir que $I_n = 4n(I_n - I_{n+1})$.

c) En déduire la nature de la série $\sum I_n$.

3. Soit α un réel donné n'appartenant pas à l'ensemble des entiers naturels. On pose

$$a_0 = 1\ ;\ \forall n \geq 1,\ a_n = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)}{n!}$$

a) Utiliser la règle de Raabe-Duhamel pour montrer que la série $\sum a_n$ est absolument convergente si et seulement si $\alpha > 0$.

b) Montrer que si $\alpha < -1$, la série $\sum a_n$ diverge.

c) On suppose que $-1 < \alpha < 0$.

i) Prouver que $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(|a_n|) = -\infty$.

ii) Montrer que la série $\sum a_n$ converge.