Corrigé TD5 : Algèbre linéaire

Exercice 5 (Centrale PC 2014)
Soient $f_1, \dots, f_n$ des endomorphismes nilpotents de E, espace vectoriel de dimension n, qui commutent 2 à 2. Montrer que si $k \in [\![1, n]\!]$ alors $\text{rg}(f_1 \circ \cdots \circ f_k) \leqslant n - k$.(*)
Que peut-on en déduire ?

On raisonne par récurrence sur k :

- Pour $k = 1$, f_1 est nilpotent donc non bijectif : par l'absurde, si f_1 était bijectif, on pourrait composer l'égalité $f_1^p = 0$ (f_1 est nilpotent) par f^{-1} pour obtenir $f_1^{p-1} = 0$ puis $f_1^{p-2} = 0$, jusqu'à arriver à $f_1 = 0$ qui n'est pas inversible.
  Une autre méthode est de calculer $\det(f_1)$ *avec* $f_1^p = 0$ *donc* $(\det f_1)^p = 0$.
- On suppose que $\text{rg}(f_1 \circ \cdots \circ f_k) \leqslant n - k$, avec $k \leqslant n - 1$ (sinon la récurrence est finie). On note $g = f_1 \circ \cdots \circ f_k$; comme f_{k+1} commute avec $f_1, \dots, f_k$, il commute aussi avec g donc $\text{Im}(g)$ est stable par f_{k+1}. On peut donc définir l'endomorphisme induit par f_{k+1} sur $\text{Im}(g)$

$$\begin{array}{rccc} \widetilde{f_{k+1}} : & \text{Im}(g) & \longrightarrow & \text{Im}(g) \\ & x & \longmapsto & f_{k+1}(x) \end{array}$$

  Comme f_{k+1} est nilpotent ($f_{k+1}^q = 0$), $\widetilde{f_{k+1}}$ est aussi nilpotent : pour $x \in \text{Im}(g)$, on a $\left(\widetilde{f_{k+1}}\right)^q(x) = f_{k+1}^q(x) = 0$ donc $\left(\widetilde{f_{k+1}}\right)^q = 0$. On en déduit que $\widetilde{f_{k+1}}$ n'est pas bijectif donc n'est pas surjectif (endomorphisme en dimension finie) et $\text{rg}\left(\widetilde{f_{k+1}}\right) \leqslant \dim(\text{Im}\, g) - 1$. Avec l'hypothèse de récurrence, on a donc $\text{rg}\left(\widetilde{f_{k+1}}\right) \leqslant n - k - 1$.

  Reste à justifier que $\text{Im}\left(\widetilde{f_{k+1}}\right) = \text{Im}(f_{k+1} \circ g)$ pour terminer : par double inclusion

  — Si $y \in \text{Im}\, \widetilde{f_{k+1}}$, il existe $x \in \text{Im}(g)$ tel que $y = \widetilde{f_{k+1}}(x)$ donc $x = g(a)$ avec $a \in E$ et $y = f_{k+1}(x) = f_{k+1} \circ g(a) \in \text{Im}(f_{k+1} \circ g)$.
  — Si $y \in \text{Im}(f_{k+1} \circ g)$ alors il existe $x \in E$ tel que $y = f_{k+1}(g(x))$ et comme $g(x) \in \text{Im}(g)$, on a $y = f_{k+1}(g(x)) = \widetilde{f_{k+1}}(g(x)) \in \text{Im}\left(\widetilde{f_{k+1}}\right)$.

  On déduit de cette récurrence, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\text{rg}(f_1 \circ \cdots \circ f_k) \leqslant n - k$.
  Si on examine le résultat prouvé pour $k = n$, on trouve $\text{rg}(f_1 \circ \cdots \circ f_n) \leqslant n - n = 0$ donc

$$\boxed{f_1 \circ \cdots \circ f_n = 0 \text{ si les } f_i \text{ sont nilpotents et commutent}}$$

  On retrouve un cas particulier déjà vu : si les f_i *sont tous égaux à* f*, nilpotent, alors ils commutent et on retrouve* $f^n = 0$ *pour un endomorphisme nilpotent d'une espace vectoriel de dimension* n.