Corrigé TD6 : Algèbre linéaire

Exercice 6 (Centrale PSI 2022)

Soient $P_0 = 1$ et $P_k = \prod_{i=0}^{k-1}(X-i)$ pour $k \in [\![1, n]\!]$.

1. Montrer que $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$

2. Soient $a_1, \dots, a_n$ des réels et $b_1, \dots, b_n$ des entiers naturels deux à deux distincts. On pose $Q(X) = \sum_{i=1}^{n} a_i X^{b_i}$ et on suppose qu'il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $Q = (X-1)^n P$.

Calculer $\sum_{i=1}^{n} a_i P_k(b_i)$ pour $k \in [\![0, n]\!]$. *(*)*

3. On pose $B_i = \begin{pmatrix} 1 \\ b_i \\ \vdots \\ b_i^n \end{pmatrix}$ et $S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i B_i$. Calculer S_n en fonction de $n!P(1)$. *(*)*

4. En considérant le déterminant de $(S_n, B_1, \dots, B_n)$, calculer $P(1)$.

---

1. $\deg(P_k) = k$ donc la famille $(P_0, \dots, P_n)$ est une famille de $n+1$ polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$, de degrés échelonnés donc libre et est donc une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

2. Supposer $Q = (X-1)^n P$ signifie que l'on suppose que 1 est une racine de Q de multiplicité $\geqslant n$, on a donc $Q^{(k)}(1) = 0$ si $k \in [\![0, n-1]\!]$.

D'autre part $Q^{(k)} = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i(b_i-1)\dots(b_i-k+1)X^{b_i-k} = \sum_{i=1}^{n} a_i P_k(b_i) X^{i-k}$. On a donc $\sum_{k=0}^{n} a_i P_k(b_i) = Q^{(k)}(1) = 0$ si $k \in [\![0, n-1]\!]$.

Reste le cas $k = n$: on a à nouveau $\sum_{k=0}^{n} a_i P_n(b_i) = Q^{(n)}(1)$ mais cette fois, avec la formule de Leibniz, on a $Q^{(n)} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \frac{n!}{(n-j)!}(X-1)^{n-j} P^{(n-j)}$ donc $Q^{(n)}(1) = n!P(1)$.

3. Pour simplifier les notations, on indice les coordonnées de $S_n \in \mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$ par $j \in [\![0, n]\!]$.

Pour $j \leqslant n-1$, on a $(S_n)_j = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i^j$. Comme $(P_0, \dots, P_j)$ est une base de $\mathbb{R}_j[X]$, il existe des scalaires $\alpha_0, \dots, \alpha_j$ tels que $X^j = \sum_{h=0}^{j} \alpha_h P_h$. On a donc $b_i^j = \sum_{h=0}^{j} \alpha_h P_h(b_i)$ puis $(S_n)_j = \sum_{i=0}^{n} a_i \left(\sum_{h=0}^{j} \alpha_h P_h(b_i) \right) = \sum_{h=0}^{j} \alpha_h \left(\sum_{i=0}^{n} a_i P_h(b_i) \right) = 0$ d'après la question précédente, puisque $h \in [\![0, n-1]\!]$.

On fait de même pour $j = n$ et on trouve $(S_n)_n = \sum_{h=0}^{n} \alpha_h \left(\sum_{i=0}^{n} a_i P_n(b_i) \right) = \alpha_n \sum_{i=0}^{n} a_i P_n(b_i) = \alpha_n \times n!P(1)$. Il faut donc déterminer α_n qui est une des coordonnées de X^n dans la base $(P_0, \dots, P_n)$. D'après les notations utilisées, on a $X^n = \alpha_0 P_0 + \alpha_1 P_1 + \dots + \alpha_n P_n$ mais $\deg(\alpha_0 P_0 + \dots + \alpha_{n-1} P_{n-1}) \leqslant n-1$ donc le coefficient de X^n du polynôme $\alpha_0 P_0 + \dots + \alpha_n P_n$ est celui de $\alpha_n P_n$ donc vaut α_n. En identifiant le coefficient de X^n dans l'égalité $X^n = \alpha_0 P_0 + \alpha_1 P_1 + \dots + \alpha_n P_n$, on obtient $1 = \alpha_n$. On en déduit donc $(S_n)_n = n!P(1)$.

Ainsi, on a $S_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ n!P(1) \end{pmatrix}$

4. Comme $S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i B_i \in \text{Vect}\{B_1, \dots, B_n\}$, on a $\det(S_n, B_1, \dots, B_n) = 0$.

D'autre part, $\det(S_n, B_1, \dots, B_n) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & b_1 & \dots & b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & b_1^{n-1} & \dots & b_n^{n-1} \\ n!P(1) & b_1^n & \dots & b_n^n \end{vmatrix}_{n+1} = (-1)^{(n+1)+1} n!P(1) V_n(b_1, \dots, b_n)$, en développant par la première colonne. Comme les b_i sont deux à deux distincts, le déterminant de Vandermonde $V_n(b_1, \dots, b_n) \neq 0$ donc on en déduit

$$\boxed{P(1) = 0}$$

Cela signifie qu'un tel polynôme Q (un polynôme dont seulement n coefficients sont non nuls) ne peut pas posséder 1 comme racine de multiplicité exactement n : si 1 est racine de multiplicité au moins n, on peut factoriser Q en $Q = (X-1)^n P$ mais on aura obligatoirement $P(1) = 0$ donc 1 sera automatiquement de multiplicité $\geqslant n+1$.