# TD7 : Séries numériques

**Exercice 1 (CCP PSI 2016)**
Montrer que la série de terme général $u_n = \ln(n + 2(-1)^n) - \ln(n)$ converge mais ne converge pas absolument. Vérifie-t-elle le CSSA ?

**Exercice 2**
Déterminer la nature de $\sum \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n^a + (-1)^n}}$ où $a > 0$.

**Exercice 3 (Centrale PSI 2025)**
Soit $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ admettant un $\mathrm{DL}_k(+\infty)$, $k \geqslant 2$, de la forme $f(x) \underset{x\to+\infty}{=} a_0 + \dfrac{a_1}{x} + \dfrac{a_2}{x^2} + \cdots + \dfrac{a_k}{x^k} + o\left(\dfrac{1}{x^k}\right)$.

1. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que la série $\sum_{n\geqslant 1} f(n)$ converge.
2. On pose $p_n = \prod_{k=2}^{n} f(k)$. À quelles conditions la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est-elle convergente ? *(*)*

**Exercice 4 (CCINP PSI 2023)**
Soit $u_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}}$, pour $n \geqslant 1$

1. Montrer que $u_n$ existe et tend vers 0
2. On pose $v_n = \dfrac{(-1)^n}{n} u_n$. Montrer que $\sum v_n$ converge
3. On pose $w_n = \dfrac{(-1)^n}{n} \sum_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}}$. Quelle est la nature de $\sum w_n$ ? *(*)*
4. On pose $x_n = \dfrac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}}$. Quelle est la nature de $\sum x_n$ ?

**Exercice 5**
Sachant que $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2} = \dfrac{\pi^2}{6}$, calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{(2n+1)^2}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n^2}$.

**Exercice 6 (CCP PSI 2019)**
1. Montrer que $x^n + x\sqrt{n} - 1 = 0$ admet une unique solution dans $[0, 1]$ ; on la note $x_n$.
2. Montrer que $(x_n)$ tend vers 0.
3. Étudier la nature de la série de terme général $x_n$ puis $(-1)^n x_n$. *(*)*

**Exercice 7 (CCINP PSI 2025)**
1. Soient $(u_n)$ et $(v_n)$ deux suites avec $\forall n \in \mathbb{N}, v_n \geqslant 0$. On suppose que $\sum v_n$ converge.

   On pose $U_n = \sum_{k=n}^{+\infty} u_k$, si $\sum u_n$ converge, et $V_n = \sum_{k=n}^{+\infty} v_k$
   a) On suppose $u_n = o(v_n)$. Montrer que $U_n = o(V_n)$. *(*)*
   b) On suppose $u_n \sim v_n$. Montrer que $U_n \sim V_n$.
2. Le but de cette question est d'améliorer la formule de Stirling. On pose $a_n = \ln\left(\dfrac{n! e^n}{n^{n+1/2}}\right)$ et $u_n = a_{n+1} - a_n$.
   a) En remarquant que $\dfrac{1}{n^2} \sim \dfrac{1}{n(n+1)}$, déterminer un équivalent de $R_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \dfrac{1}{k^2}$.
   b) Trouver un équivalent de $u_n$ puis un développement de $a_n$ avec la précision $o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.
   c) Conclure

## Indications

**Exercice 3**

**2.** *Commencer par calculer* $\lim \left|\dfrac{p_{n+1}}{p_n}\right|$ *et s'inspirer de la preuve de la règle de d'Alembert.*
*Considérer* $\ln(p_n)$ *lorsque c'est possible.*

**Exercice 4**

**3.** *Faire apparaître* $u_n$*.*

**Exercice 6**

**3.** *Chercher un équivalent de* $x_n$ *pour la première en remarquant que* $x_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}(1 - x_n^n)$ *; ne pas chercher à utiliser le CSSA mais un DL pour la dernière.*

**Exercice 7**

**1.a** *Utiliser la* $\varepsilon$*-définition de* $u_n = o(v_n)$*.*