(Inspiré de Centrale PC 2024 maths 2)

Soit $p \in \mathbb{N}$ et $(u_n)_{n\geqslant p}$ une suite de nombres réels. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant p$,

$$P_n = \prod_{k=p}^{n} u_k.$$

On dit que la suite $(P_n)_{n\geqslant p}$ est la suite des produits partiels du produit infini
prodn $\geqslant p u_n$.
Si la suite $(P_n)_{n\geqslant p}$ converge, on dit que sa limite est la valeur du produit infini et on pose :

$$\prod_{k=p}^{+\infty} u_k = \lim_{n\to+\infty} P_n.$$

I Résultats préliminaires

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$

1. Montrer que, pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\left|\left(\prod_{k=1}^{n}(1+x_k)\right) - 1\right| \leqslant \left(\prod_{k=1}^{n}(1+|x_k|)\right) - 1.$$

2. Montrer que, pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in [-1, +\infty[^n$,

$$\prod_{k=1}^{n}(1+x_k) \leqslant \exp\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right).$$

3. Soit $z \in \mathbb{C}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on pose

$$u_n = \left(1+\frac{z}{n}\right)^n.$$

Le but de cette sous-partie est de montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers e^z.

a) Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{C}$,
$$|(1+t) - e^t| \leqslant |t|^2 e^{|t|}$$

b) Soit $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ et $n \in \mathbb{N}^\star$. On note $M = \max\{|a|, |b|\}$.
Montrer que $|a^n - b^n| \leqslant nM^{n-1}|a-b|$.

c) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $\left|\left(1+\frac{z}{n}\right)^n - e^z\right| \leqslant \frac{|z|^2}{n} e^{|z|}$.

d) Conclure que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge vers e^z.

II Exemples de calcul de produit infini

1. Calculer $\displaystyle\prod_{n=2}^{+\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$ et $\displaystyle\prod_{n=2}^{+\infty}\left(1+\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right)$.

On pourra, pour tout $N \geqslant 2$, établir une expression de $\displaystyle\prod_{n=2}^{N}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$ *et* $\displaystyle\prod_{n=2}^{2N}\left(1+\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right)$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos u)^n \, \mathrm{d}u.$$

a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n$ et en déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$W_{2n+1} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$$

b) Déterminer un équivalent de la suite $(W_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ et en déduire $\displaystyle\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1+\frac{1}{4n^2-1}\right)$.

III Expression de la fonction sinus comme produit infini

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$P_n(X) = \frac{1}{2i}\left(\left(1+\frac{iX}{2n+1}\right)^{2n+1} - \left(1-\frac{iX}{2n+1}\right)^{2n+1}\right).$$

1. Montrer que P_n est un polynôme de degré $2n+1$.

2. Pour $k \in [\![0, 2n]\!]$, on note $x_k = (2n+1)\tan\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)$. Montrer que l'ensemble des racines de P_n est $\{x_k \mid k \in [\![0, 2n]\!]\}$.

3. En déduire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que

$$P_n(X) = \lambda X \prod_{j=1}^{n}\left(1-\frac{X^2}{x_j^2}\right).$$

4. En calculant $P_n'(0)$, montrer que :

$$P_n(X) = X \prod_{j=1}^{n}\left(1-\frac{X^2}{x_j^2}\right).$$

5. Justifier les deux inégalités suivantes :

i) $\forall x \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \ln(1-x) \geqslant -2x$.

ii) $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[, \tan(x) \geqslant x$.

6. Soit $m \geqslant 2$ un entier et $n \geqslant m+1$. On fixe un réel $x \in]0, \pi[$.

a) Prouver

$$\left|\ln\left(\frac{P_n(x)}{x}\right) - \sum_{j=1}^{m}\ln\left(1-\frac{x^2}{x_j^2}\right)\right| \leqslant 2x^2 \sum_{j=m+1}^{+\infty}\frac{1}{j^2}$$

b) En déduire

$$\left|\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right) - \sum_{j=1}^{m}\ln\left(1-\frac{x^2}{j^2\pi^2}\right)\right| \leqslant 2x^2 \sum_{j=m+1}^{+\infty}\frac{1}{j^2}$$

c) Montrer $\sin(x) = x\prod_{j=1}^{+\infty}\left(1-\frac{x^2}{j^2\pi^2}\right)$.

7. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\sin(x) = x\prod_{j=1}^{+\infty}\left(1-\frac{x^2}{j^2\pi^2}\right).$$