Correction du DM5

(Inspiré de Centrale PC 2024 maths 2)

Partie I

1. On raisonne par récurrence sur n :

- Pour $n=1$, on a $|1+x_1|-1 \leqslant 1+|x_1|-1$ par inégalité triangulaire.
- Si on suppose $\left|\prod_{i=1}^{n}(1+x_i)-1\right| \leqslant \prod_{i=1}^{n}(1+|x_i|)-1$ alors $\left|\prod_{i=1}^{n+1}(1+x_i)-1\right| = \left|\prod_{i=1}^{n}(1+x_i)-1+x_{n+1}\prod_{i=1}^{n}(1+x_i)\right| \overset{\text{IT}}{\leqslant} \left|\prod_{i=1}^{n}(1+x_i)-1\right| + |x_{n+1}|\prod_{i=1}^{n}(1+|x_i|) \overset{\text{HR}}{\leqslant} \prod_{i=1}^{n}(1+|x_i|)-1+|x_{n+1}|\prod_{i=1}^{n}(1+|x_i|) = \prod_{i=1}^{n+1}(1+|x_i|)-1$

2. Par convexité de la fonction exp, on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x \geqslant 1+x$ donc $\exp\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right) = \prod_{k=1}^{n} e^{x_k} \geqslant \prod_{k=1}^{n}(1+x_k)$ pour $x_k \geqslant -1$ car $1+x_k \geqslant 0$.

3. a) Pour $z \in \mathbb{C}$ fixé, on pose $f_z(t) = e^{tz}$ et on applique l'inégalité de Taylor-Lagrange sur le segment $[0,1]$: f_z est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,1]$, $f_z'(t) = ze^{tz}$ donc $f_z'(0) = z$, puis $f_z''(t) = z^2e^{tz}$ donc, si $t \in [0,1]$, on a $|f_z''(t)| = |z|^2 e^{t\,\mathrm{Re}(z)} \leqslant |z|^2 e^{|z|}$ car $\mathrm{Re}(z) \leqslant |z|$. On en déduit $|f_z(1) - f_z(0) - f_z'(0)| = |e^z - (1+z)| \leqslant \frac{1}{2}|z|^2 e^{|z|} \leqslant |z|^2 e^{|z|}$

b) $|a^n - b^n| = |a-b| \times \left|\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}\right|$ et $\left|\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}\right| \overset{\text{IT}}{\leqslant} \sum_{k=0}^{n-1} |a|^k |b|^{n-1-k} \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} M^k M^{n-k-1} = nM^{n-1}$.

c) On a $\left(1+\frac{z}{n}\right)^n - e^z = \left(1+\frac{z}{n}\right)^n - \left(e^{z/n}\right)^n$ donc, avec **I.3.b**, $\left|\left(1+\frac{z}{n}\right)^n - e^z\right| \leqslant \left|\left(1+\frac{z}{n}\right) - e^{z/n}\right| \times nM^{n-1}$ avec $M = \max\left\{\left|1+\frac{z}{n}\right|, |e^{z/n}|\right\}$. Avec **I.3.a**, on a $\left|\left(1+\frac{z}{n}\right) - e^{z/n}\right| \leqslant \frac{|z|^2}{n^2} e^{|z|/n}$ et, avec **I.2**, $\left|1+\frac{z}{n}\right|^{n-1} \overset{\text{IT}}{\leqslant} \left(1+\frac{|z|}{n}\right)^{n-1} \leqslant e^{\frac{n-1}{n}|z|}$; de plus, $\left|e^{z/n}\right|^{n-1} \leqslant \left(e^{|z|/n}\right)^{n-1}$ donc $M^{n-1} \leqslant e^{\frac{n-1}{n}|z|}$ et $\left|\left(1+\frac{z}{n}\right)^n - e^z\right| \leqslant \frac{|z|^2}{n} e^{|z|}$

Partie II

1. $\prod_{n=2}^{N}\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = \prod_{k=2}^{N}\frac{(n-1)(n+1)}{n^2} = \frac{(N-1)!\times\frac{1}{2}(N+1)!}{(N!)^2} = \frac{N+1}{2N}$ donc $\boxed{\prod_{k=2}^{+\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{2}}$

On sépare pairs et impairs : $\prod_{n=2}^{2N}\left(1+\frac{(-1)^{k+1}}{n}\right) = \prod_{k=1}^{N}\left(1-\frac{1}{2k}\right)\prod_{k=1}^{N-1}\left(1+\frac{1}{2k+1}\right) = \prod_{k=1}^{N}\frac{2k-1}{2k}\prod_{k=1}^{N-1}\frac{2k+2}{2k+1} = \frac{1}{2}$.

Comme $\prod_{k=2}^{2N+1}\left(1+\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right) = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2N+1}\right) \xrightarrow[N\to+\infty]{} \frac{1}{2}$, on a $\boxed{\prod_{k=2}^{+\infty}\left(1+\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right) = \frac{1}{2}}$

2. a) Fait en cours : Wallis

b) $W_{2n+1} \sim \frac{4^n\left(\frac{n}{e}\sqrt{2\pi n}\right)^2}{2n\left(\frac{2n}{e}\sqrt{4\pi n}\right)}$ donc $\boxed{W_{2n+1} \sim \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n}}}$

On a ensuite $\prod_{n=1}^{N}\left(1+\frac{1}{4n^2-1}\right) = \prod_{n=1}^{N}\frac{(2n)^2}{(2n-1)(2n+1)} = (2N+1)\left(\prod_{n=1}^{N}\frac{2n}{(2n+1)}\right)^2 = (2N+1)W_{2N+1}^2$ donc

$\boxed{\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1+\frac{1}{4n^2-1}\right) = \frac{\pi}{2}}$

Partie III

1. Comme $\left(1+\frac{iX}{2n+1}\right)^{2n+1} \in \mathbb{C}_{2n+1}[X]$ et $\left(1-\frac{iX}{2n+1}\right)^{2n+1} \in \mathbb{C}_{2n+1}[X]$, on a $P_n \in \mathbb{C}_{2n+1}[X]$. De plus le coefficient de X^{2n+1} de P_n est $\frac{1}{2i}\left[\left(\frac{i}{2n+1}\right)^{2n+1} - \left(\frac{-i}{2n+1}\right)^{2n+1}\right] = \frac{(-1)^n}{(2n+1)^{2n+1}} \neq 0$ donc $\boxed{\deg(P_n) = 2n+1}$

2. Pour $z \neq -(2n+1)i$, on a $P_n(z) = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{2n+1+iz}{2n+1-iz}\right)^{2n+1} = 1 \Leftrightarrow \exists k \in [\![-n,n]\!],\ \frac{2n+1+iz}{2n+1-iz} = e^{\frac{2ik\pi}{2n+1}} \Leftrightarrow \exists k \in [\![-n,n]\!], z = \frac{(2n+1)\left(e^{\frac{2ik\pi}{2n+1}}-1\right)}{i\left(1+e^{\frac{2ik\pi}{2n+1}}\right)}$ car $e^{\frac{2ik\pi}{2n+1}} \neq -1$. De plus $\frac{(2n+1)\left(e^{\frac{2ik\pi}{2n+1}}-1\right)}{i\left(1+e^{\frac{2ik\pi}{2n+1}}\right)} = \frac{(2n+1)e^{\frac{2i\pi}{2n+1}}2i\sin\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}{ie^{\frac{2i\pi}{2n+1}}\cos\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)} = (2n+1)\tan\frac{k\pi}{2n+1} = x_k$. Comme $\frac{k\pi}{2n+1} \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, les x_k sont $2n+1$ racines distinctes de P_n, qui est de degré $2n+1$, on a donc toutes les racines de P_n, et elles sont simples.

3. On a $P_n = \alpha \prod_{k=-n}^{n} (X - x_k)$ et comme $x_0 = 0$ et $x_{-k} = -x_k$, on a $P_n = \alpha X \prod_{k=1}^{n} (X^2 - x_k^2)$ puis $\boxed{P_n = \lambda X \prod_{k=1}^{n} (1 - \frac{X^2}{x_k^2})}$ puisque $x_k \neq 0$ pour $k \in [\![1, n]\!]$.

4. $P_n'(0) = 1$ avec la forme initiale de P_n et $P_n'(0) = \lambda$ avec la forme factorisée de P_n donnée à la question **III.3**. On a donc $\lambda = 1$ et $\boxed{P_n = X \prod_{k=1}^{n} (1 - \frac{X^2}{x_k^2})}$

5. La première inégalité se trouve en étudiant la fonction $x \mapsto \ln(1-x) + 2x$ qui est croissante sur $\left[0, \frac{1}{2}\right[$ et la seconde provient de la convexité de la fonction tan sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$.

6. a) Si $j \in [\![1, n]\!]$ alors $\frac{j\pi}{2n+1} \in \left[\frac{\pi}{2n+1}, \frac{\pi}{2}\right[$ donc, avec **III.5.ii**, $x_j \geqslant \pi$ puis $1 - \frac{x^2}{x_j^2} > 0$. On en déduit $\ln\left(\frac{P_n(x)}{x}\right) = \sum_{j=1}^{n} \ln\left(1 - \frac{x^2}{x_j^2}\right)$ donc $\left|\ln\left(\frac{P_n(x)}{x}\right) - \sum_{j=1}^{m} \ln\left(1 - \frac{x^2}{x_j^2}\right)\right| = \left|\sum_{j=m+1}^{n} \ln\left(1 - \frac{x^2}{x_j^2}\right)\right| = -\sum_{j=m+1}^{n} \ln\left(1 - \frac{x^2}{x_j^2}\right)$.
Comme $m \geqslant 2$, on a, pour $j \geqslant m+1$ et avec **III.5.ii**, $x_j \geqslant j\pi \geqslant 3\pi$ donc $\frac{x^2}{x_j^2} \leqslant \frac{1}{2}$ et, avec **III.5.i**, $-\ln\left(1 - \frac{x^2}{x_j^2}\right) \leqslant 2\frac{x^2}{x_j^2} \leqslant 2\frac{\pi^2}{(j\pi)^2}$, à nouveau avec **III.5.ii**. La série à termes positifs $\sum_{j \geqslant 1} \frac{1}{j^2}$ étant convergente, on a $\sum_{j=m+1}^{n} \frac{1}{j^2} \leqslant \sum_{j=m+1}^{+\infty} \frac{1}{j^2}$.

b) Pour m fixé, on fait tendre n vers $+\infty$ donc l'inégalité précédente : d'après la partie **I** et la formule d'Euler, $\lim_{n\to+\infty} P_n(x) = \sin(x) > 0$ donc $\lim_{n\to+\infty} \ln\left(\frac{P_n(x)}{x}\right) = \ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)$. D'autre part, la somme étant finie, par continuité de la fonction ln et avec $(2n+1)\tan\left(\frac{j\pi}{2n+1}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{j\pi}$, on a $\lim_{n\to+\infty} \sum_{j=1}^{m} \ln\left(1 - \frac{x^2}{x_j^2}\right) = \sum_{j=1}^{m} \ln\left(1 - \frac{x^2}{(j\pi)^2}\right)$.

c) On fait cette fois tendre m vers $+\infty$ dans l'inégalité de **III.6.b** : $\sum_{j=m+1}^{+\infty} \frac{1}{j^2} \xrightarrow[m\to+\infty]{} 0$ (reste de série convergente) donc par définition de la convergence d'une série, on a $\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right) = \sum_{j=1}^{+\infty} \ln\left(1 - \frac{x^2}{(j\pi)^2}\right)$ et, par continuité de la fonction exp et par définition de la convergence d'un produit infini, on en déduit $\sin(x) = x \prod_{j=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{x^2}{(j\pi)^2}\right)$ pour $x \in]0, \pi[$.

7. On va étendre la relation précédente à $\mathbb{R}$: on pose $g(x) = x \prod_{j=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{x^2}{(j\pi)^2}\right)$

- $g(0) = g(\pi) = 0$ donc $g = \sin$ sur $[0, \pi]$
- g est sin sont impaires donc $g = \sin$ sur $[-\pi, \pi]$
- $(x+2\pi)\prod_{j=1}^{m} \left(1 - \frac{(x+2\pi)^2}{(j\pi)^2}\right) = (x+2\pi)\prod_{j=1}^{m} \frac{[(j-2)\pi - x][(j+2)\pi + x]}{(j\pi)^2} = \frac{x+2\pi}{\prod_{j=1}^{m}(j\pi)^2} \prod_{k=-1}^{m-2} (k\pi - x) \prod_{k=3}^{m+2} (k\pi + x) = \frac{x}{\prod_{j=1}^{m}(j\pi)^2} \prod_{k=1}^{m-2} (k\pi - x) \prod_{k=1}^{m+2} (k\pi + x) = x \prod_{k=1}^{m} \left(1 - \frac{x^2}{(k\pi)^2}\right) \times \frac{[(m+1)\pi + x][(m+2)\pi + x]}{[(m-1)\pi - x][m\pi - x]} \xrightarrow[m\to+\infty]{} g(x)$.
On en déduit que g est 2π-périodique, comme la fonction sin donc $g = \sin$ sur $\mathbb{R}$ entier.