TD8 : Réduction

Exercice 1

Diagonaliser $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Exercice 2 (Mines-Télécom PSI 2025)

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 2 & c \\ 0 & 0 & d \end{pmatrix}$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que A soit diagonalisable.

Exercice 3 (CCINP PSI 2024)

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ et $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On pose : $\forall M \in E, u(M) = aM + bM^T$.

1. Montrer que u est un endomorphisme.
2. Montrer que u est diagonalisable et déterminer ses valeurs propres.
3. Calculer $\operatorname{Tr} u$ et $\det u$.

Exercice 4 (CCINP PSI 2024)

Soient $n \geqslant 2$, $\alpha \in \mathbb{C}$ et $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $a_{i,j} = \alpha^{i+j-2}$

1. Calculer le rang de A et en déduire ses valeurs propres.
2. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que A soit diagonalisable.

Exercice 5 (Mines-Ponts PSI 2015)

Soit A la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients diagonaux valent $1, 2, \ldots, n$, tous les autres étant égaux à 1.

1. Montrer que $\lambda \in \operatorname{Sp}(A)$ si et seulement si $\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{\lambda - i} = 1$. *(*)*
2. En déduire que A est diagonalisable. *(*)*

Exercice 6 (Mines-Ponts PSI 2018)

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -12 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ sont-elles semblables ?

Exercice 7 (CCP PSI 2016)

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & -4 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Diagonaliser A.
2. Montrer que si M commute avec D, matrice diagonale semblable à A, alors M est diagonale.
3. Trouver les matrices $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $M^7 + M + I_3 = A$. *(*)*

Exercice 8 (CCINP PSI 2022)

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ A & 0 \end{pmatrix}$

1. Déterminer le rang de B en fonction du rang de A. En déduire que A est inversible si et seulement si B est inversible.
2. Déterminer $\mathcal{X}_B$ en fonction de $\mathcal{X}_A$. Que peut-on en déduire sur les valeurs propres de A et B ? *(*)*
3. Montrer que si A est inversible et admet n valeurs propres distinctes alors B est diagonalisable.
4. B est-elle diagonalisable si A n'est plus supposée inversible ?
5. Montrer que B est diagonalisable si et seulement si A est inversible et diagonalisable. *(*)*

Indications

Exercice 5

1. *Utiliser la définition de valeurs propres/vecteurs propres et résoudre le système.*
2. *Étudier une fonction pour déterminer le nombre de valeurs propres de A.*

Exercice 7

3. *Commencer par résoudre $N^7 + N + I_3 = D$ en remarquant qu'une solution N commute nécessairement avec D.*

Exercice 8

2. *Calculer $\mathcal{X}_B(\lambda)$ en supposant $\lambda \neq 0$ pour commencer et faire des manipulations par blocs sur le déterminant.*
5. *Relier les dimensions des espaces propres de B avec ceux de A en calculant $\operatorname{rg}(B - \lambda I_{2n})$, en faisant des manipulations par blocs sur les matrices.*