TD9 : Réduction

Exercice 1 (CCP PSI 2012)
Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $\det(A) = 10$, $\mathrm{Tr}(A) = -6$ et $A - I_3 \notin \mathcal{GL}_3(\mathbb{R})$. Exprimer A^{-1} comme un polynôme en A. *(*)*

Exercice 2 (CCINP PSI 2023)
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 - A^2 + A - I_n = 0$

1. Montrer que les valeurs propres de A sont racines de $X^3 - X^2 + X - 1$
2. Calculer $\det(A)$
3. Que dire de $\mathrm{Tr}(A)$?

Exercice 3 (CCP PSI 2023)

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et P annulateur de A ; montrer que les valeurs propres de A sont des racines de P.
2. Existe-t-il $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{Tr}(A) = 0$ et $A^2 + A^T = I_3$? *(*)*

Exercice 4 (Mines-Télécom PSI 2023)
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 - 3A - 5I_n = 0$. Montrer que $\det(A) > 0$. *(*)*

Exercice 5 (CCINP PSI 2022)
Soient $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et a l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A.

1. A est-elle diagonalisable ?
2. Déterminer les droites stables par a
3. Soient P un plan stable par a et a' l'endomorphisme de P induit par a
   a) Montrer que $\mathcal{X}_{a'}$ divise $\mathcal{X}_a$
   b) En déduire $P \subset \ker(a - 3id)^2$. *(*)*
   c) Trouver les sous espaces de $\mathbb{R}^3$ stables par a

Exercice 6 (CCINP PSI 2025)
Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\phi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par $\phi(M) = AM$.

1. Montrer que ϕ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}, \phi^k(M) = A^k M$.
3. Montrer que, si $P \in \mathbb{R}[X]$, alors P annule ϕ si et seulement si P annule A.
4. En déduire que A est diagonalisable si et seulement si ϕ est diagonalisable.
5. Montrer que les valeurs propres de A sont les valeurs propres de ϕ ; on pourra utiliser les colonnes de la matrice M, si M est un vecteur propre de ϕ.
6. Déterminer une base des espaces propres de ϕ en utilisant une base des espaces propres de A.

Exercice 7 (CCP PSI 2017)
Donner les éléments propres de $f : M \mapsto M + \mathrm{Tr}(M)I_n$. Est-il diagonalisable ? Bijectif ? Si oui, calculer f^{-1}. *(*)*

Exercice 8 (CCINP PSI 2023)
Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on pose $B = \begin{pmatrix} A & A \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$.

1. Diagonaliser $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
2. Montrer que A est diagonalisable si et seulement si B l'est et déterminer les valeurs propres de B en fonction de celles de A. *(*)*

Exercice 9 (CCP PSI 2017)

1. Soient $(A, B) \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{C})^2$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que N est inversible et déterminer N^{-1}. *(*)*
2. Calculer N^2 et $P(N^2)$ pour $P \in \mathbb{C}[X]$.
3. Si N est diagonalisable, AB l'est-elle ? Étudier la réciproque. *(*)*

Exercice 10 (Centrale PSI 2024)
Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, à coefficients dans $\mathbb{Z}$ telle qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ vérifiant $M^k = I_2$. On note $d = \min\left\{k \in \mathbb{N}^*, M^k = I_2\right\}$

1. M est-elle diagonalisable ?
   Justifier que $|\operatorname{Tr}(M)| \leqslant 2$
2. On suppose que toutes les valeurs propres de M sont réelles. Quelles sont les valeurs possibles de d ?
3. On suppose que toutes les valeurs propres de M sont complexes non réelles.
   Montrer que le polynôme caractéristique de M est l'un des 3 polynômes suivants : $X^2 - X + 1$, $X^2 + 1$, $X^2 + X + 1$
4. À l'aide des questions précédentes, montrer que $d \in \{1, 2, 3, 4, 6\}$

Exercice 11 **(Mines-Télécom PSI 2021)**

Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

1. Montrer que A n'est pas diagonalisable mais trigonalisable
2. Déterminer les éléments propres de A.
3. Déterminer un vecteur propre u de A associé à la valeur propre 2 puis un vecteur v tel que $(A - 2I_3)v = u$. En déduire une matrice P inversible et T triangulaire supérieure telles que $A = PTP^{-1}$
4. Calculer T^k puis A^k

Indications

Exercice 1

trouver $\mathcal{X}_A$.

Exercice 3

2. *trouver un polynôme annulateur de A (de degré 4) ; la réponse est qu'une telle matrice n'existe pas*

Exercice 4

étudier $\operatorname{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$ et chercher si les vp sont réelles ou non (étude de fonction).

Exercice 5

3.b *Cayley-Hamilton.*

Exercice 7

Chercher un polynôme annulateur (de degré 2).

Exercice 8

2. *Utiliser la diagonalisation de M (et les coefficients des matrices P et P^{-1}, à déterminer) pour diagonaliser B par blocs*

Exercice 9

1. *chercher N^{-1}, de la même forme que N.*
3. *a) pour le premier sens, si N est DZ, N^2 aussi puis utiliser un polynôme annulateur de N^2.*
   b) pour la réciproque : justifier que N^2 est DZ, puis introduire un polynôme annulateur de N^2, en déduire un polynôme annulateur de N, le factoriser (théoriquement) dans $\mathbb{C}$ et vérifier qu'il est à racines simples si 0 n'est pas une racine.