**L'usage des calculatrices est interdit**

**EXERCICE**

(Inspiré de E3A PC 2016 maths 2)

Le but de cet exercice est de donner trois expressions différentes du réel $\ln(2)$ sous la forme d'une somme de série puis d'étudier la vitesse de convergence de ces trois séries.

# Partie I.

**1.** a) Déterminer, pour $k \in \mathbb{N}^*$, la valeur de la dérivée $k^{\text{ème}}$ de la fonction $\varphi : x \longmapsto -\ln(1-x)$.

b) Montrer alors que $\ln(2) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k2^k}$. *On pourra utiliser une formule de Taylor sur l'intervalle* $\left[0, \frac{1}{2}\right]$.

**2.** a) Justifier la convergence de la série $\sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{k(k+1)2^k}$.

b) En remarquant que $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$, déterminer la valeur de $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)2^k}$.

**3.** a) Montrer que la série $\sum_{k\geqslant 1} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ est convergente.

b) Montrer qu'il existe une constante $\gamma \in \mathbb{R}$ (que l'on ne demande pas de déterminer) telle que, lorsque $n$ tend vers $+\infty$, on ait $H_n \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) + \gamma + o(1)$, où $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

c) En déduire la valeur de $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$.

# Partie II.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note :

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k2^k}, \quad S_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}, \quad \text{et} \quad T_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)2^k}.$$

$R_n$, $S_n$ et $T_n$ sont donc les restes d'ordre $n$ des séries vues en première partie.
Le but de cette partie est de déterminer des équivalents, lorsque $n$ tend vers $+\infty$, de $R_n$, $S_n$ et $T_n$.

**1.** On note dans cette question $(U_n)_{n\geqslant 0}$ la suite définie par $U_n = \sum_{i=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2^i}$.

a) Calculer $U_n$.

b) Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad R_n = \frac{U_n}{n+1} - \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{U_k}{k(k+1)}$.

c) Montrer que $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{U_k}{k(k+1)} \leqslant \frac{R_n}{n+2}$.

d) Conclure que $R_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n2^n}$.

**2.** a) Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}$, $2S_n + \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^{k-1}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$.

b) Justifier que $\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^{k+1}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)\right| \leqslant \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$.

c) En déduire un équivalent de $S_n$.

**3.** Montrer, en vous inspirant de la méthode utilisée en **II.1**, que $T_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2 2^n}$.

**Fin de l'exercice**

**PROBLÈME : Matrices semblables à leur inverse**
(d'après de Mines-Ponts PSI 2025 maths 1)

# Notations et définitions.

On note $\mathbb{C}$ le corps des nombres complexes, $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ désigne l'algèbre des matrices carrées complexes de taille $n$ et $\mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$ le groupe des matrices complexes inversibles de taille $n$.
On rappelle que deux matrices $A$ et $B$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ sont semblables si

$$\exists P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{C}),\ A = P^{-1}BP.$$

Pour tout matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ le polynôme caractéristique de $A$ est défini par

$$\mathcal{X}_A = \det(X\ I_n - A).$$

On rappelle qu'une matrice $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est une matrice de symétrie si et seulement si elle vérifie $S^2 = I_n$.

# Partie I : Étude d'un exemple

Dans cette partie, on considère un complexe $\alpha$ et on définit la matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1-\alpha \\ \alpha^2 & 1+\alpha^2 & -1+\alpha \\ \alpha^2 & \alpha^2 & \alpha \end{pmatrix}.$$

**1.** Étude de diagonalisabilité

a) Vérifier que le polynôme caractéristique de $A$ est $\mathcal{X}_A = (X-1)(X-\alpha)(X-\alpha^2)$.
b) En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que $A$ soit diagonalisable.

Dans toute la suite de cette partie, on supposera que $\alpha$ est non nul et on considère la matrice $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ définie par :

$$B = \frac{1}{\alpha}A = \frac{1}{\alpha}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1-\alpha \\ \alpha^2 & 1+\alpha^2 & -1+\alpha \\ \alpha^2 & \alpha^2 & \alpha \end{pmatrix}.$$

**2.** Justifier que $A$ est inversible.

**3.** Dans cette question, on suppose $\alpha \neq 1$.

a) Déterminer une matrice diagonale $D \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ semblable à $B$.
b) Calculer $D^{-1}$ et montrer que $D$ et $D^{-1}$ sont semblables.
c) En déduire que $B$ et $B^{-1}$ sont semblables.

**4.** On suppose cette fois que $\alpha = 1$. On a donc

$$A = B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Montrer que $B$ est semblable à $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et déterminer une matrice $P \in \mathcal{GL}_3(\mathbb{C})$ telle que $B = PTP^{-1}$.
*On choisira une matrice $P$ dont tous les coefficients sont entiers.*
b) Déterminer la matrice $T^{-1}$ et justifier que $B$ est semblable à $B^{-1}$.
c) Soit $S_1$ la matrice définie par $S_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. Vérifier que $S_1$ est une matrice de symétrie.
d) Justifier qu'il existe une matrice de symétrie $S_2 \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ telle que $B = S_1S_2$.

## Partie II : Le cas diagonalisable.

Soit $A$ une matrice appartenant à $\mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$.

**1.** Soit $z$ un nombre complexe non nul. Exprimer $\det(zI_n - A)$ en fonction de $z$, $\det(A)$ et $\det\left(\frac{1}{z}I_n - A^{-1}\right)$.

**2.** On suppose dans cette question que $A$ est semblable à son inverse. Préciser les valeurs que peut prendre le déterminant de $A$, et en déduire que $\mathcal{X}_A$ vérifie la propriété suivante, notée $(*)$ :

$$\exists \varepsilon \in \{-1,+1\}, \forall z \in \mathbb{C}^*, \mathcal{X}_A(z) = \varepsilon z^n \mathcal{X}_A\left(\frac{1}{z}\right). \qquad (*)$$

**3.** Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice diagonalisable. On suppose que le polynôme caractéristique de $B$ vérifie la propriété $(*)$.

a) On suppose que la factorisation de $\mathcal{X}_B$ dans $\mathbb{C}[X]$ est $\mathcal{X}_B = \prod_{k=1}^{r}(X-\lambda_k)^{n_k}$ avec $n_k \in \mathbb{N}^*$, les $\lambda_k$ étant deux à deux distincts. Justifier que $\lambda_k \neq 0$, pour tout $k \in [\![1, r]\!]$.

b) Donner la factorisation dans $\mathbb{C}[X]$ du polynôme $X^n \mathcal{X}_B\left(\frac{1}{X}\right)$.

c) Démontrer que $B$ est inversible et semblable à son inverse.

**4.** Soit $B$ la matrice définie par $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

a) Vérifier que $\mathcal{X}_B$ vérifie la propriété $(*)$.

b) Justifier que $B$ est inversible mais que $B$ n'est pas semblable à son inverse. *On pourra déterminer les espaces propres de $B$ et $B^{-1}$ pour la valeur propre 2.*

*Ainsi, hors du cas diagonalisable, le polynôme caractéristique ne suffit pas à caractériser les matrices semblables à leur inverse. La suite du problème propose de caractériser ces matrices par une autre méthode.*

## Partie III : Produits de matrices de symétries.

**1.** a) Démontrer que si $M$ et $N$ sont deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et si $M$ est inversible alors $MN$ et $NM$ sont semblables.

b) En déduire que si $S_1$ et $S_2$ sont deux matrices de symétrie, la matrice produit $A = S_1S_2$ est inversible et semblable à son inverse.

Soit $B$ et $C$ deux matrices de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$. Soit $A \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$ la matrice suivante, définie par blocs :

$$A = \begin{pmatrix} B & 0_n \\ 0_n & C \end{pmatrix}.$$

**2.** Soit $S_1$ la matrice suivante, définie par blocs

$$S_1 = \begin{pmatrix} 0_n & P \\ Q & 0_n \end{pmatrix}$$

où $P$, $Q$ sont deux éléments de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$.
Déterminer les conditions reliant $B$, $C$, $P$, $Q$ pour que les matrices $S_1$ et $S_2 = S_1A$ soient des matrices de symétries.

**3.** En déduire que si $C$ est semblable à $B^{-1}$, alors $A$ est un produit de deux matrices de symétries.

## Partie IV : La matrice $J_n(\lambda)$.

**1.** Soit $E$ un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension $n$. Soit $g$ un endomorphisme de $E$ tel que $g^n = 0$ et $g^{n-1} \neq 0$.
Démontrer qu'il existe une base de $E$ dans laquelle la matrice de $g$ est la matrice $N$ ci-après :

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Autrement dit $N = (n_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ avec $n_{i,j} = 1$ si $j = i+1$ et $n_{i,j} = 0$ sinon.

**2.** Pour $\lambda \in \mathbb{C}$ non nul, on pose $J_n(\lambda) = \lambda I_n + N$. Démontrer que $J_n(\lambda)$ est inversible et déterminer en fonction de $N$ et de $\lambda$ la matrice $N'$ telle que $J_n(\lambda)^{-1} = \dfrac{1}{\lambda} I_n + N'$.

**3.** Calculer $(N')^n$ et en déduire que $J_n(\lambda)^{-1}$ est semblable à $J_n\left(\dfrac{1}{\lambda}\right)$.

*Pour tout polynôme $P = P(X) \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$ on pose*

$$\begin{cases} s_1(P) &= P(-X) \\ s_2(P) &= P(1-X) \\ g(P) &= P(X+1) - P(X) \end{cases}$$

*On définit ainsi les trois endomorphismes $s_1$, $s_2$ et $g$ de l'espace vectoriel $\mathbb{C}_{n-1}[X]$, (il n'est pas demandé de le prouver).*

**4.** Calculer $s_1^2$, $s_2^2$ et exprimer $s_1 \circ s_2$ en fonction de $g$ et $\mathrm{Id}_{\mathbb{C}_{n-1}[X]}$.

**5.** Soit $P$ un polynôme non constant. Exprimer le degré du polynôme $g(P)$ en fonction du degré de $P$.

**6.** Déduire des questions précédentes que la matrice $J_n(1)$ est un produit de deux matrices de symétries.

On pourrait démontrer par le même type de raisonnement, et on l'admet, que la matrice $J_n(-1)$ est un produit de deux matrices de symétries.

# Partie V : Une caractérisation des matrices semblables à leur inverse.

Soit $A$ une matrice de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$ semblable à son inverse. On admet le résultat suivant :
*$A$ est semblable à une matrice diagonale par blocs de la forme*

$$A' = \begin{pmatrix} J_{n_1}(\lambda_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_{n_2}(\lambda_2) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & J_{n_r}(\lambda_r) \end{pmatrix}$$

*où les $\lambda_i$ sont les valeurs propres de $A$ ( pas nécessairement distinctes) et $r, n_1, \cdots, n_r$ sont des entiers naturels non nuls. De plus la matrice diagonale par blocs $A'$ est unique à l'ordre près des blocs.*

**1.** Démontrer que $A^{-1}$ est semblable à $\begin{pmatrix} J_{n_1}\left(\frac{1}{\lambda_1}\right) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_{n_2}\left(\frac{1}{\lambda_2}\right) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & J_{n_r}\left(\frac{1}{\lambda_r}\right) \end{pmatrix}$.

**2.** En utilisant les résultats établis dans les parties précédentes, démontrer que $A$ est un produit de deux matrices de symétries.

**Fin du problème**