TD11 : Suites et séries de fonctions

Exercice 1 (CCINP PSI 2025)

Soit $a \in \mathbb{R}^+$, on définit, sur $I = [0,1]$, la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par $\forall n \geqslant 1, \forall x \in I, f_n(x) = \dfrac{nx(x^2+a)}{nx+1}e^{-x}$.

1. Montrer que (f_n) converge simplement sur I vers une fonction f à déterminer.
2. Discuter selon les valeurs de a de la convergence uniforme de (f_n).
3. Montrer que si $h \in]0,1[$ alors (f_n) converge uniformément sur $[h,1]$, pour tout $a \in \mathbb{R}^+$.

Exercice 2 (Centrale PSI 2025)

Soient $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ lipschitzienne et $f_n : x \longmapsto \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f\left(x + \frac{k}{n}\right)$

1. Rappeler la définition de f est K-lipschitzienne.
2. Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$. *(*)*
4. Si $f(x) = x^2$, étudier les modes de convergence de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3 (Mines-Ponts MP 2010)

1. Si $\alpha > 0$, on pose $u_n(x) = \sin^\alpha x \cos^n x$; montrer que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge simplement sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ et calculer sa somme.
2. À quelle condition sur α y a-t-il convergence normale ? uniforme ?

Exercice 4 (CCINP PSI 2025)

Soit $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{x^2+n^2}$.

1. Déterminer le domaine de définition D de f.
2. Montrer que f est continue sur D.
3. La série converge-t-elle normalement sur D ?
4. Déterminer la limité en $+\infty$ de f

Exercice 5 (ENSAM PSI 2018)

Soit $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}$.

1. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}^{+*}$.
2. Montrer que, pour $x > 0$, $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+x)(2n+1+x)}$ et en déduire les variations de f.
3. Calculer $f(x) + f(x+1)$ et en déduire des équivalents de f en 0^+ et $+\infty$. *(*)*

Exercice 6 (Mines-Télécom PSI 2024)

Pour $n \geqslant 2$, on pose $f_n(x) = \dfrac{xe^{-nx}}{\ln n}$ et $S(x) = \displaystyle\sum_{n\geqslant 2} f_n(x)$

1. Déterminer le domaine de définition D_S de S.
2. La série converge-t-elle normalement sur D_S ?
3. Montrer que S est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$.
4. Montrer que S est continue en 0. *(*)*

Exercice 7 (Centrale PSI 2025)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}^{+*}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \ln(1+u_n)$.

1. Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite. Que dire de la série $\sum (-1)^n u_n$?
2. Montrer que $\ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right) \sim -\dfrac{u_n}{2}$. Quelle est la nature de $\sum u_n$?
3. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions définie par $f_0 : I \to \mathbb{R}^{+*}$ est bornée et $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in I, f_{n+1}(x) = \ln(1+f_n(x))$. Montrer que la suite (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}$ et déterminer sa limite.
4. Étudier la convergence uniforme de la suite (f_n) puis les modes de convergence de la série $\sum (-1)^n f_n$. *(*)*

Indications

Exercice 2

3. *Écrire* $f(x) - f_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \int_k^{k+1} \ldots\ldots$ *(tout regrouper sous ces deux symboles, avec entre autres la relation de Chasles).*

Exercice 5

3. *Pour l'équivalent en* $+\infty$*, encadrer* $f(x)$ *avec la valeur de* $f(x) + f(x+1)$ *et la monotonie de* f*.*

Exercice 6

4. *CVU sur* $\mathbb{R}^+$

Exercice 7

4. *Utiliser la suite* (u_n) *pour majorer* $\|f_n\|_\infty$*.*