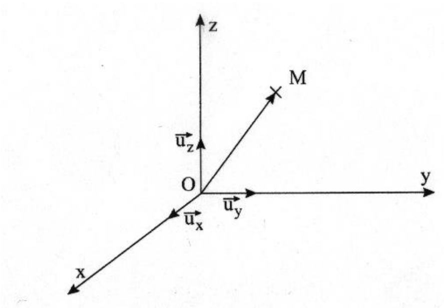
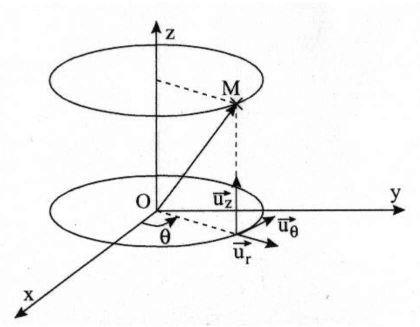
Révisions rapides de mécanique classique du point en 3 pages.

A.Repérage d'un point dans l'espace. Cinématique : décrit le mouvement.

Cartésiennes ***Cylindriques***





$\overrightarrow{OM} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z$

$\overrightarrow{OM} = r\vec{u}_r + z\vec{u}_z$
$x = r \cdot cos(\theta)$
$y = r \cdot sin(\theta)$

Par défaut, un point M est repéré par ses coordonnées cartésiennes (x, y, z) *d'origine O et base* $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$.

Le vecteur position est $\overrightarrow{OM} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z$ *noté aussi* (x, y, z)

Le vecteur vitesse est $\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \dot{x}\vec{u}_x + \dot{y}\vec{u}_y + \dot{z}\vec{u}_z$. *noté aussi* $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$

Le vecteur accélération est $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \ddot{x}\vec{u}_x + \ddot{y}\vec{u}_y + \ddot{z}\vec{u}_z$. *noté aussi* $(\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z})$

<u>Pour un mouvement plan dans le plan Oxy</u>, on peut utiliser les coordonnées polaires (r, θ) *de base locale* $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ *, qui sont une partie des coordonnées cylindriques (Cf ci-dessus).*

Vérifie que : $\vec{u}_r = \vec{u}_x . cos(\theta) + \vec{u}_y . sin(\theta)$ $\vec{u}_\theta = -\vec{u}_x . sin(\theta) + \vec{u}_y . cos(\theta)$

On peut alors dériver par rapport au temps et obtenir :

$$\frac{d\vec{u}_r}{dt} = \dot{\theta}\vec{u}_\theta \quad et \quad \frac{d\vec{u}_\theta}{dt} = -\dot{\theta}\vec{u}_r$$

De $\overrightarrow{OM} = r\vec{u}_r$ *(car z=0) on sort alors :*

$$\vec{v} = \frac{d}{dt}(r\vec{u}_r) = \dot{r}\vec{u}_r + r\frac{d}{dt}(\vec{u}_r) = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta \quad et \quad \vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{u}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\vec{u}_\theta$$

Application simple : trajectoire circulaire de centre O, de rayon r=R. Les dérivations se simplifient et on obtient :

$$\vec{v} = R\dot{\theta}\vec{u}_\theta \quad et \quad \vec{a} = -R\dot{\theta}^2\vec{u}_r + R\ddot{\theta}\vec{u}_\theta = R\ddot{\theta}\vec{u}_\theta - \frac{v^2}{R}\vec{u}_r$$

B.Aspect dynamique : obtention du mouvement.

Soit une particule ponctuelle de masse m constante, repérée par sa position $\overrightarrow{OM}$, sa vitesse $\vec{v}$, son accélération $\vec{a}$. Elle est soumise à n forces $\vec{F_i}$, i variant de 1 à n, de la part du reste de l'Univers.

B1.Principe Fondamental de la Dynamique ou PFD.

Le PFD s'écrit dans un référentiel galiléen :

$$m\vec{a} = \sum_i \vec{F_i} = \vec{F} \quad \text{où } \vec{F} \textit{ est la force totale}$$

Applications simples : particule dans le champ de pesanteur terrestre, dans un champ magnétique, accrochée à un ressort...

<u>Exemples de forces à connaître :</u>

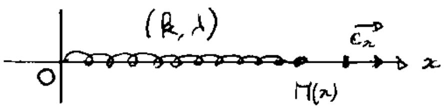
a)Poids $m\vec{g}$

b)Poussée d'Archimède : tout corps plongé dans un fluide (liquide ou gaz) subit la poussée d'Archimède : opposée du poids du fluide déplacé par corps.

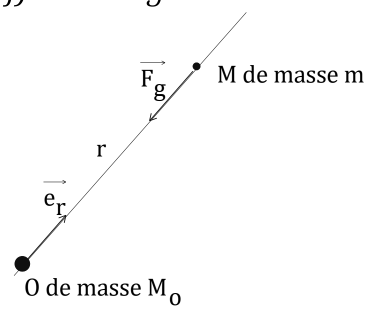
c)Force électrique subie par une charge q dans un champ électrique $\vec{E}$: $\vec{F}_{el} = q\vec{E}$

d)Force magnétique subie par une charge q dans un champ magnétique $\vec{B}$: $\vec{F}_m = q\vec{v} \wedge \vec{B}$

e)Tension de ressort de raideur k, de longueur à vide λ : $\vec{T} = -k(x - \lambda)\vec{e}_x$



f)Force de gravitation.



La force de gravitation exercée par O sur M est : $\vec{F}_g = -\frac{GM_om}{r^2}\vec{e}_r = -\frac{GM_om}{r^3}\overrightarrow{OM}$

où $G=6.67.10^{-11}$SI est la constante de gravitation universelle.

g)Loi de Coulomb. Même forme avec des charges : q en M, Q_o en O

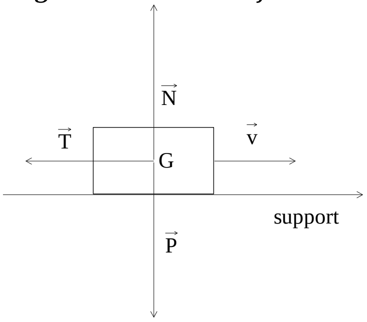
la force électrique exercée par O sur M est : $\vec{F}_{el} = +\frac{Q_oq}{4\pi\varepsilon_or^2}\vec{e}_r = +\frac{Q_oq}{4\pi\varepsilon_or^3}\overrightarrow{OM}$

h)Liaison sans frottement (cas idéal): ne travaille pas donc perpandiculaire à la vitesse

i)Loi de frottement fluide : $\vec{F} = -\lambda\vec{v}$.

j)Loi de frottement solide. Loi de Coulomb : la force de liaison a une composante normale $\vec{N}$ et une composante tangentielle $\vec{T}$ opposée à la vitesse (frottement).

Règles : $T = fN \text{ si } \vec{v} \text{ non nulle }, T < fN \text{ sinon.} \quad f \text{ coefficient de frottement solide}$



Sur le dessin ci-dessus, en mouvement horizontal, on a N=P=mg et T=fN=fmg.

B2.Théorème de l'Energie cinétique ou TEC.

Energie cinétique $E_c = \frac{1}{2}mv^2$ *Puissance de la force* $\vec{F}_i$: $\wp_i = \vec{F}_i.\vec{v}$

Le TEC s'écrit dans un référentiel galiléen :

$$\frac{dE_c}{dt} = \sum_i \wp_i = \wp \quad \text{où} \quad \wp \text{ est la puissance totale}$$

PROP : si une force est perpandiculaire à la vitesse (cas de la force magnétique), sa puissance est nulle et elle n'a aucun effet sur l'énergie cinétique.

B3. Forme alternative du Théorème de l'Energie cinétique ou TEC.

Travail élémentaire de la force $\vec{F}_i$ *quand la particule bouge de* $d\overrightarrow{OM}$: $\delta W_i = \vec{F}_i.d\overrightarrow{OM}$

Travail de la force $\vec{F}_i$ *quand la particule bouge de A à B :* $W_i = \int_{M=A}^{M=B} \delta W_i = \int_{M=A}^{M=B} \vec{F}_i.d\overrightarrow{OM}$

Le TEC s'écrit :

$$E_c(B) - E_c(B) = \sum_i W_i = W \quad \text{où } W \text{ est le travail total reçu de } A \text{ à } B$$

B4. Forces conservatives.

Une force $\vec{F}_i$ *est conservative si il existe une grandeur* E_{pi}*, énergie potentielle, telle que :*

$$\wp_i = \vec{F}_i.\vec{v} = -\frac{dE_{pi}}{dt} \quad ou \quad \vec{F}_i = -\overrightarrow{grad}(E_{pi})$$

Les deux définitions sont identiques.

Rappel : $\overrightarrow{grad}(f) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\vec{e}_x + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\vec{e}_y + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)\vec{e}_z$

Un système est conservatif si toutes les forces appliquées sont conservatives. On note E_p *l'énergie potentielle totale. L'application du TEC donne alors :* $E_c+E_p=Cte=E_m$ *qu'on appelle énergie mécanique.*

Exemples de forces déjà vues conservatives à vérifier et connaître :

a)Poids. $\boldsymbol{E_p = -m\vec{g}\cdot\overrightarrow{OM} = mgz}$ *si z est l'altitude*

b)Force électrique. En électrostatique, le champ électrique s'écrit $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}(V)$ *où V est le potentiel électrique (en V).* $\vec{F}_{el} = q\vec{E} = -\overrightarrow{grad}(qV)$ *Donc* $\boldsymbol{E_p = qV}$

d)Tension de ressort. $\vec{T} = -k(x-\lambda)\vec{e}_x = -\overrightarrow{grad}\left(\frac{k}{2}(x-\lambda)^2\right)$ *donc :* $\boldsymbol{E_p = \frac{k}{2}(x-\lambda)^2}$

e)Force de gravitation. $\vec{F}_g = -\frac{GM_om}{r^2}\vec{e}_r = -\overrightarrow{grad}\left(-\frac{GM_om}{r}\right)$ *donc* $\boldsymbol{E_p = -\frac{GM_om}{r}}$

si M_o *immobile en O.*

B5.Forme générale du TEC ou Théorème de l'énergie mécanique.

La force totale sur la particule peut s'écrire $\vec{F} = \vec{F}_{cons} + \vec{F}_{noncons} = --\overrightarrow{grad}(E_p) + \vec{F}_{noncons}$

LE TEC s'écrit alors : $\frac{dE_c}{dt} = \vec{F}_{cons}.\vec{v} + \vec{F}_{noncons}.\vec{v} = -\frac{dE_p}{dt} + \vec{F}_{noncons}.\vec{v}$ *soit:*

$$\frac{d}{dt}(E_c + E_p) = \frac{d}{dt}(E_m) = \vec{F}_{noncons}.\vec{v}$$

C.Aspect dimensionnel.

Une distance est en m
un temps est en s
Une vitesse en $m.s^{-1}$*, une accéleration en* $m.s^{-2}$
Une force en N (Newton) ou $kg.m.s^{-2}$
Un travail ou une énergie en J (Joule) ou $kg.m^2.s^{-2}$
Une puissance en W (Watt) ou $J.s^{-1}$

D.Mouvement au voisinage d'une position d'équilibre. Oscillateurs.

Dans un référentiel galiléen, on étudie le mouvement selon l'axe Ox d'une particule M , de masse m, soumise à la force unique conservative : $\vec{F} = F(x)\vec{e}_x = -\overrightarrow{grad}\left(E_p(x)\right) = -\left(\frac{dE_p}{dx}\right)\vec{e}_x$

D1)Recherche d'une position d'équilibre. Si M est immobile en x=x_o, alors le PFD donne F(x_o)=0. On peut aussi dire que l'énergie potentielle est extrémale en x=x_o : $E_p'(x_o) = 0$

D2)Mouvement au voisinage de la position d'équilibre.

On suppose x(t) voisin de x_o et on pose $x(t) = x_o + \varepsilon(t)$ *d'où* $\ddot{x}(t) = \ddot{\varepsilon}(t)$

Un DL à l'ordre 1 de E_p' au voisinage de x_o donne alors :

$$E_p'(x) = E_p'(x_o + \varepsilon) \approx E_p'(x_o) + \varepsilon . E_p''(x_o) = 0 + \varepsilon . E_p''(x_o)$$

Le PFD s'écrit : $m\ddot{x} = -E_p'(x)$ *qui donne* $m\ddot{\varepsilon} = -\varepsilon . E_p''(x_o)$

Qu'on met sous la forme :

$$\boldsymbol{\ddot{\varepsilon} + \left(\frac{E_p''(x_o)}{m}\right)\varepsilon = 0}$$

Trois solutions :

a) $E_p''(x_o) = 0$*. Il faut reprendre le DL à l'ordre 2. Hors programme.*

b) $E_p''(x_o) < 0$ *soit MAXIMUM D'ENERGIE POTENTIELLE EN x_o. Les solutions sont des exponentielles divergentes. La particule ne reste pas au voisinage de la position d'équilibre. POSITION D'EQUILIBRE INSTABLE.*

c) $E_p''(x_o) > 0$ *soit MINIMUM D'ENERGIE POTENTIELLE EN x_o. Les solutions sont des sinusoïdes de pulsation* $\omega_o = \sqrt{\left(\frac{E_p''(x_o)}{m}\right)}$ *et on a un* ***oscillateur harmonique*** *approché. La particule reste au voisinage de la position d'équilibre. Dans la réalité expérimentale, les frottements vont faire faire revenir la particule sur sa position d'équilibre. POSITION D'EQUILIBRE STABLE.*

E.Le théorème du moment cinétique TMC.

Dans un référentiel galiléen R, on suit une particule M, de masse m, de quantité de mouvement $\vec{p} = m\vec{v}$.

Soit P un point fixe dans R.

On définit : moment cinétique de M par rapport à P : $\vec{\sigma}_P = \overrightarrow{PM} \wedge \vec{p}$

moment de la force $\vec{F}$, appliquée au point Q, par rapport à P : $\vec{\mathcal{M}}_{\vec{F}/P} = \overrightarrow{PQ} \wedge \vec{F}$

Si M est soumis à la force totale $\vec{F}$, appliquée en M, alors le TMC se déduit directement du PFD :

$$\frac{d\vec{\sigma}_P}{dt} = \vec{\mathcal{M}}_{\vec{F}/P}$$

En mécanique du point, ce théorème ne sert pratiquement qu'à montrer que la trajectoire d'une particule soumise à une force centrale de centre O est plane dans un plan contenant O.

F. Forces centrales.

Une force est centrale de centre O fixe si la force $\vec{F}$ est toujours parallèle au vecteur $\overrightarrow{OM}$ soit donc $\overrightarrow{OM} \wedge \vec{F} = \vec{0}$*. On dit aussi que sa droite d'action passe par O.*

On prend O comme origine du référentiel d'étude.

PROP : *le mouvement de M est plan, plan qui contient le point O.*

DEM : On définit le moment cinétique en O : $\vec{\sigma} = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v}$

On dérive par rapport au temps : $\frac{d\vec{\sigma}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \wedge m\vec{v} + \overrightarrow{OM} \wedge m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{v} \wedge m\vec{v} + \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F} = \vec{0}$

Donc $\vec{\sigma}$ est une constante que l'on supposera non nulle pour la suite.

Définissons l'axe Oz tel que : $\vec{\sigma} = \sigma_o \vec{e}_z$ *avec* $\sigma_o > 0$.

On a bien évidemment : $\vec{\sigma}.\overrightarrow{OM} = 0$ *ce qui donne maintenant :* $\overrightarrow{OM}.\vec{e}_z = z = 0$

Le mouvement se fait dans le plan z=0. Le mouvement est plan.

Rem : si $\vec{\sigma} = \vec{0}$*, alors le mouvement est rectiligne sur une droite passant par O.*

G. Forces centrales newtoniennes.

Cas de la force de gravitation ou de la force électrostatique.

Exemple d'une planète M de masse m orbitant autour du Soleil de masse M_S supposé immobile en O, origine d'un référentiel galiléen.
La force est centrale, donc le mouvement est plan, on choisit l'axe Oz comme dans la partie D et on se place dans le plan Oxy de la trajectoire et on adopte les coordonnées polaires de centre O.
Les vecteurs position, vitesse et accélération sont :

$\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r$ $\qquad \vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$ $\qquad \vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\vec{e}_\theta$

Le PFD donne : $\qquad m\vec{a} = \vec{F}_g = -\frac{GM_S m}{r^2}\vec{e}_r = -\overrightarrow{grad}\left(-\frac{GM_S m}{r}\right) = -\overrightarrow{grad}(E_p)$

$\overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v} = \vec{\sigma} = \sigma_o \vec{e}_z$ $avec\ \sigma_o > 0$ donne : $\qquad r^2\dot{\theta} = C = \frac{\sigma_o}{m} > 0$

Donc le mouvement se fait dans le sens trigonométrique. Cette dernière relation porte le nom de loi des aires : la surface balayée par le rayon vecteur par unité de temps est une constante.
Si on dérive cette relation par rapport au temps, on tombe sur : $r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = 0$ ce qui simplifie le PFD.

Comme la force est conservative, on a conservation de l'énergie mécanique. On peut donc écrire :

$$E_c + E_p = E_m = Cte$$

Si on développe : $\qquad \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GM_S m}{r^2} = E_m$

Si l'énergie mécanique est positive, la particule peut partir à l'infini. On parle d'état non lié. La trajectoire est en fait une parabole (E_m=0) ou une hyperbole (E_m>0) de foyer O. Cette relation permet de calculer les vitesses de libération : vitesse nécessaire pour se libérer gravitationnelle d'un astre central.

Si l'énergie mécanique est négative, la particule ne peut pas partir à l'infini. On parle d'état lié. La trajectoire est une ellipse de foyer O.

La seule trajectoire simple à étudier est la trajectoire circulaire uniforme de centre O, et qu'il faut absolument maîtriser ,voir exercice. Elle donne accès à la troisième loi de Kepler, qui a permis d'avoir accès à la masse du Soleil :
Si une planète effectue une trajectoire circulaire de rayon a avec une période T, alors $\frac{a^3}{T^2}$ est une grandeur qui ne dépend que de l'astre central (ici le Soleil), donc qui a la même valeur pour toutes les planètes du système solaire. Quantitativement, on a : $\boldsymbol{\frac{a^3}{T^2} = \frac{GM_S}{4\pi^2}}$

Pour la Terre autour su Soleil : $a \approx 150.10^6\ km \quad et\ T \approx 365{,}24\ jours\ de\ 86400s$
Aller chercher la constante de gravitation universelle et vérifier $M_S \approx 2.10^{30}\ kg$.

Rem : on peut faire le même raisonnement avec les satellites de Jupiter ou Mars , ou la Lune autour de la Terre. On change d'astre central.

H.Système matériel de N particules.

Si N=2, alors on peut revenir à une seule particule fictive et on peut utliser tous les résultats précédents.

Si N>2, alors il n'existe aucune approche théorique globale permettant de résoudre le problème posé. Les structures chaotiques apparaissent même avec un système de 3 particules.

Pour les systèmes à grand nombre de particule (N>>1), il n'y a que deux cas limites un peu moins complexes :

a)le gaz parfait, où on pourra faire une approche statistique. En thermodynamique, la température et la pression cinétiques sont des moyennes statistiques efectuées sur un grand nombre de particules.

b)le solide indéformable où le nombre de particule est en fait infini, et tous les calculs sont intégraux. Cette partie de la physique est abordée en SI avec un vocabulaire et des méthodes de calculs légèrement différents de la physique.

Dans le cadre du programme de physique, le cas le plus courant est le suivant :

Solide indéformable de masse m, de centre d'inertie G, en rotation autour d'un axe immobile Oz (vecteur unitaire $\vec{e}_z$), le vecteur rotation instantannée étant noté $\vec{\omega} = \omega\vec{e}_z$, pour lequel le moment cinétique en O s'écrit $\vec{\sigma}_O = J\vec{\omega}$ (la relation générale est matricielle, cf cours de SI), et l'énergie cinétique s'écrit $E_c = \frac{1}{2}J\omega^2$.

J est appelé moment d'inertie du solide par rapport à l'axe Oz et s'exprime en kg.m^2.

Si le solide est soumis aux forces extérieures $\vec{F}_i$ appliquées aux points Q_i du solide

alors le TMC en O s'écrit :

$$\frac{d\vec{\sigma}_O}{dt} = J\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \sum_i \vec{\mathcal{M}}_{\vec{F}_i/O}$$

le PFD :

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = m\frac{d\vec{v}_G}{dt} = \sum_i \vec{F}_i$$

et le TEC :

$$\frac{dE_c}{dt} = \sum_i \vec{F}_i \, . \, \vec{v}_{Q_i}$$

Quelques exercices peuvent tomber sur cette partie de programme. Voir par exemple la balance de Cotton dans Mines-Ponts Ph2 psi 2016.

F. Changement de référentiel. Hors programme en physique.

Soit le référentiel $R_2(O_2, x_2,y_2,z_2)$ en mouvement par rapport au référentiel $R_1(O_1, x_1,y_1,z_1)$ supposé galiléen. Le mouvement de R_2 par rapport à R_1 est complètement décrit :

a)par le mouvement de O_2 dans R_1 . (Mouvement de translation).

b)par la rotation de R_2 par rapport à R_1 décrite par le vecteur rotation instantanée $\vec{\omega}$.

Des méthodes de calculs non développées ici permettent de relier les vitesses et accélération d'une particule en M définies dans R_1 (indice 1) et dans R_2(indice 2)

Pour les vitesses : $\vec{v}_1(M) = \vec{v}_2(M) + \vec{v}_1(O_2) + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O_2M}$

Pour les accélérations: $\vec{a}_1(M) = \vec{a}_2(M) + \vec{a}_e(M) + \vec{a}_c(M)$

avec $\vec{a}_e(M) = \vec{a}_1(O_2) + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{O_2M} + \vec{\omega} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O_2M}\right)$ accélération d'entraînement

et $\vec{a}_c(M) = 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_2(M)$ accélération de Coriolis

Deux cas simples à maîtriser :

1)R_2 en translation par rapport à R_1 : $\vec{\omega} = \vec{0}$

$$\vec{v}_1(M) = \vec{v}_2(M) + \vec{v}_1(O_2) \quad et \quad \vec{a}_1(M) = \vec{a}_2(M) + \vec{a}_1(O_2)$$

Simple additivité des vitesses et accélarations.

Le PFD dans R_1 galiléen donne : $m\vec{a}_1(M) = \vec{F}$ où $\vec{F}$ est la force totale appliquée à M

donne dans R_2 non galiléen : $m\vec{a}_2(M) = \vec{F} + \{-m\vec{a}_1(O_2)\}$

terme correctif

2)R_2 en rotation uniforme autour de R_1 : $O_2=O_1$ d'axe de rotation O_1z : $\vec{\omega} = \omega\vec{e}_z$

$$\vec{v}_1(M) = \vec{v}_2(M) + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O_2M} \quad et \quad \vec{a}_1(M) = \vec{a}_2(M) + \vec{\omega} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O_2M}\right) + 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_2(M)$$

Le PFD dans R_1 galiléen donne : $m\vec{a}_1(M) = \vec{F}$ où $\vec{F}$ est la force totale appliquée à M

donne dans R_2 non galiléen :

$$m\vec{a}_2(M) = \vec{F} + \left\{-m\vec{\omega} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O_2M}\right)\right\} + \{-2m\vec{\omega} \wedge \vec{v}_2(M)\}$$

Dans l'immense majorité des applications physiques, le référentiel terrestre (ou du laboratoire, notre Univers de référence) peut être considéré comme galiléen (le mouvement de translation non uniforme de la Terre autour du soleil, et sa rotation propre ont des effets négligeables). Il y a 2 contre-exemples à connaître :

a)les mouvements circulaires à grande échelle des perturbations atmosphériques dues à l'accélération de Coriolis.

b)le phénomènes des marées océaniques où il faut se placer dans le référentiel héliocentrique (lié au Soleil) et tenir compte de l'influence de la Lune. La complexité dynamique est telle que les résultats sont en partie empiriques.

Le mouvement de la rotation de la Terre sur elle-même peut s'apprécier en visitant l'expérience du pendule de Foucault au Musée des Arts et Métiers de Paris. La première démonstration publique a été faite en 1851 sous la voute du Panthéon à Paris.

Pour la petite histoire, il semble que l'expérience initiale soit entièrement empirique, Foucault ne connaissant a priori pas les travaux de Coriolis (1832).