M01.Formes remarquables.

A SAVOIR DETECTER DANS LES CALCULS.

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$
$$(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$$
$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

Les nombres complexes le sont effectivement et il convient de faire attention. Le physicien a généralement la coutume (un peu lourde) de faire ressortir ce danger potentiel en soulignant les nombres complexes. Ne pas souligner permet d'aller plus vite, éventuellement dans le mur.

M02.Résolution de systèmes d'équations linéaires.

A)cas général : n équations linéaires à n inconnues.

Les inconnues sont x_j pour j compris entre 1 et n.
Le système d'équations peut s'écrire :

$$Pour\ i\ compris\ entre\ 1\ et\ n \qquad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \ = \ b_i$$

Si on définit le vecteur colonne [X] dont la composante j est x_j, le vecteur colonne [B] dont la composante i est b_i, A la matrice carrée (n,n) dont l'élément courant est a_{ij}, le système d'équations s'écrit sous la forme simplifiée :

$$A[X] = [B]$$

et on a alors un problème d'algèbre linéaire.

Résoudre le système revient à calculer si possible la matrice inverse A^{-1} de façon à sortir :

$$[X] = A^{-1}[B]$$

On alors les résultats suivants à absolument connaître :

a)si $t(A) \neq 0$, la matrice A est inversible (l'application linéaire associée à la matrice A est une bijection) et il existe une unique solution au problème. Le système d'équations porte alors le nom de SYSTEME DE CRAMER.
A titre d'exemple important, dans le cas (a) avec [B] vecteur nul, alors l'unique solution est [A] nul.

b) si $(A) = 0$, la matrice n'est pas inversible et on a deux cas possibles :
b1)le nombre de solutions est infini.
b2)il n'y a aucune solution.
Dans le cas (b) en physique, on a généralement une solution évidente qui permet de sélectionner le cas b1. Voir exemple 1 page suivante.

B)p équations linéaires à n inconnues. p ≠ n.

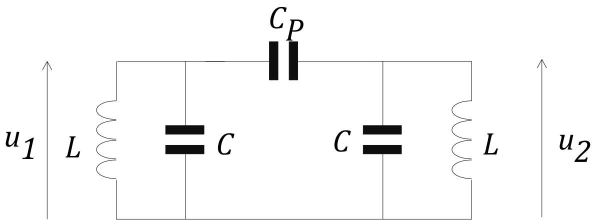
Si p>n, il n'y a généralement aucune solution sauf par exemple, si les équations excédentaires aux n premières sont des combinaisons linéaires des n premières.

Si p<n, on peut fixer arbitrairement la valeur de (n-p) variables et on retombe sur un système de p équations à p inconnues. Retour au II.A.

C)p équations quelconques à n inconnues.

En physique, on se permet souvent de généraliser les résultats précédents car cela marche souvent très bien ***a posteriori*** *MAIS la démonstration n'en a pas été faite. Il convient donc de se méfier et de bien surveiller les contradictions ou résultats aberrants qui pourraient apparaître dans la suite des calculs.*

Exemple n°1 :



On étudie le régime libre du circuit électrique ci-dessus. On postule l'existence d'un régime permanent sinusoïdal de pulsation ω inconnue. Dans le cas où il existe, on peut alors utiliser la notation complexe pour relier les amplitudes complexes $\underline{u}_1$ et $\underline{u}_2$ asssociées à $u_1(t)$ et $u_2(t)$.

On obtient alors :

$$[1 - L(C + C_P)\omega^2]\underline{u_1} \ + \ LC_P\omega^2\underline{u_2} \ = \ 0$$
$$LC_P\omega^2\underline{u_1} \ + \ [1 - L(C + C_P)\omega^2]\underline{u_2} \ = \ 0$$

On a ici un système linéaire de 2 équations à 2 inconnues $(\underline{u_1}, \underline{u_2})$ dont une solution évidente est (0,0).

Si le système est de Cramer, c'est la seule solution. Pour avoir un nombre de solutions infinies, il faut donc que son déterminant soit nul, ce qui va nous donner les valeurs possibles pour ω.

On calcule :

$$\Delta = [1 - L(C + C_P)\omega^2]^2 - [LC_P\omega^2]^2$$

On reconnaît une forme remarquable :

$$\Delta = [1 - L(C + 2C_P)\omega^2][1 - LC\omega^2]$$

Et on peut maintenant sortir les deux solutions possibles :

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad ou \quad \omega = \frac{1}{\sqrt{L(C + 2C_P)}}$$

Un régime libre quelconque sera une combinaison linéaire des deux sinusoïdes possibles. C'est un régime non amorti car non résistif : il n'y a aucune perte d'énergie. Expérimentalement, ce n'est évidemment pas réaliste.

Exemple n°2. Le déterminant n'est pas forcément nécessaire.

Trois vecteurs complexes $\underline{\vec{A}}$, $\underline{\vec{B}}$, $\underline{\vec{C}}$ sont reliés par :

$$\underline{\vec{A}} \ + \ \underline{\vec{B}} \ = \ \underline{\vec{C}}$$
$$n_1(\underline{\vec{A}} \ - \ \underline{\vec{B}}) \ = n_2 \ \underline{\vec{C}}$$

n_1 et n_2 sont des réels supérieurs ou égaux à 1. Exprimer deux des vecteurs en fonction seulement du troisième. Que peut-on affirmer si un des vecteurs est réel ?

Il suffit de diviser la seconde équation par n_1.

La demi-somme donnera $\underline{\vec{A}}$ en fonction de $\underline{\vec{C}}$

La demi-différence donnera $\underline{\vec{B}}$ en fonction de $\underline{\vec{C}}$

Si un des trois est réel, les deux autres aussi.