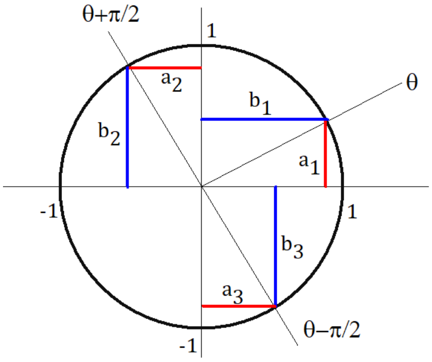
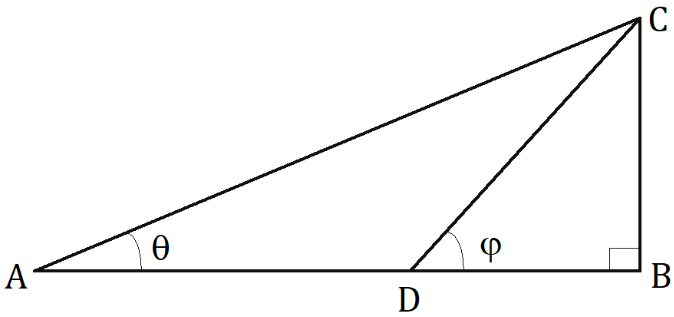
M04. Trigonométrie élémentaire.





<u>Cercle trigonométrique.</u> Savoir déphaser de $\pi/2$ un angle.
Les 3 segments a_i ont la même longueur. Les 3 segments b_i ont la même longueur. En tenant compte des signes, on a :

$$cos(\theta) = sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = -sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) \qquad sin(\theta) = -cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)$$

<u>Valeurs usuelles :</u> $cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$

<u>Pythagore à maitriser absolument.</u> Dans le triangle rectangle ABC :

$$(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2 \qquad cos(\theta) = \frac{AB}{AC} = \frac{adjacent}{hypoth\acute{e}nuse} \qquad sin(\theta) = \frac{BC}{AC} = \frac{oppos\acute{e}}{hypoth\acute{e}nuse}$$

<u>Al Kachi en option.</u> $(AC)^2 = (AD)^2 + (DC)^2 + 2 \cdot AD \cdot DC \cdot cos(\varphi)$

<u>Liaison avec les exponentielles complexes :</u>

$$e^{j\theta} = cos(\theta) + jsin(\theta) \qquad cos(\theta) = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2} = Re\left(e^{j\theta}\right) \qquad sin(\theta) = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j} = Im\left(e^{j\theta}\right)$$

cos est une fonction paire de période 2π ; sin est une fonction impaire de période 2π.

<u>A connaître absolument pour obtenir toute la suite :</u>

$$cos^2(\theta) + sin^2(\theta) = 1$$

$$cos(a+b) = cos(a)cos(b) - sin(a)sin(b) \qquad sin(a+b) = sin(a)cos(b) + sin(b)cos(a)$$

Ce qui permet de sortir notamment :

$$cos(2\theta) = cos^2(\theta) - sin^2(\theta) = 2cos^2(\theta) - 1 = 1 - 2sin^2(\theta) \qquad sin(2\theta) = 2cos(\theta)sin(\theta)$$

A partir de maintenant, on peut sortir :

$$cos(a-b) = cos(a)cos(b) + sin(a)sin(b) \qquad sin(a-b) = sin(a)cos(b) - sin(b)cos(a)$$

Puis :

$$2cos(a)cos(b) = cos(a+b) + cos(a-b) \qquad 2sin(a)sin(b) = cos(a-b) - cos(a+b)$$

$$2sin(a)cos(b) = sin(a+b) + sin(a-b)$$

Ce qui permet de linéariser les produits de fonctions sinusoïdales.
Si on veut faire l'inverse, on définit :

$$\{p = a + b \;\; et \; q = a - b\} \; id \; est \; \left\{a = \frac{p+q}{2} \;\; et \; b = \frac{p-q}{2}\right\}$$

Et vous réécrivez les relations dans l'autre sens. Je donne la première :

$$cos(p) + cos(q) = 2cos\left(\frac{p+q}{2}\right)cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$