M05. Dérivation et intégration.

Notion de différentielle et liaison avec l'intégration.

$\boldsymbol{df = f'(x) \cdot dx}$ *relie la variation élémentaire de f à la variation élementaire de x et n'est vraie qu'à la limite de dx tendant vers 0.*

D'un point de vue physique : si Δf est la variation de f associée à une variation Δx de x alors

$$dx = \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x \qquad et \qquad df = \lim_{\Delta f \to 0} \Delta f \qquad vérifient \quad \boldsymbol{df = f'(x) \cdot dx}$$

Pour continuer le calcul, il faut intégrer entre l'état 1 (x_1,$f(x_1)$) et l'état 2 (x_2,$f(x_2)$) et on obtient évidemment :

$$\boldsymbol{\int_{f(x_1)}^{f(x_2)} df = f(x_2) - f(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f'(x) \cdot dx}$$

Exemples : $dcos(\omega t) = -\omega sin(\omega t)dt$; $dln(x) = \frac{dx}{x}$; $dln(xy) = \frac{dx}{x} + \frac{dy}{y}$

Prop : les différentielles se comportent comme les dérivées.

Notation de l'intégration en physique.

Soit F(x) une fonction dont la dérivée par rapport à x est f '(x).

2 façons de l'écrire selon qu'on met les bornes ou non :

$$\int f(x)dx = F(x) + \boldsymbol{Cte} \qquad ou \qquad \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Choisir et ne pas mélanger. La première est généralement plus pratique.

Notation de la dérivée en physique pour une fonction d'une seule variable.

Pour un même problème, les variables d'étude peuvent varier selon la question. Par exemple, pour le mouvement d'une particule dans le plan Oxy

a)si on s'intéressse à la loi horaire, la variable est le temps et les fonctions x(t) et y(t).

b)si on s'intéresse à la trajectoire, on étudiera y=y(x) ou x=x(y)

Il faut donc toujours rappeler la variable de dérivation (sauf pour le temps)

Si f est une fonction de x, qu'on écrit en physique $f = f(x)$ {rem: pas vrai en maths}, la dérivée qui est notée $f'(x)$ en maths sera notée en physique $\left(\frac{df}{dx}\right)$ qui pourra être considéré comme une division et qui permet de façon simple :

a)D'exprimer la différentielle : $\boldsymbol{df = \left(\frac{df}{dx}\right) dx}$

b)d'avoir la dérivée de la fonction inverse $x = x(f)$: $\boldsymbol{x'(f) = \left(\frac{dx}{df}\right) = \frac{1}{\left(\frac{df}{dx}\right)}}$

c)d'exprimer les dérivées composées. Si $x = x(t)$et $f = f(x)$ alors :

$$\boldsymbol{\left(\frac{df}{dt}\right) = \left(\frac{df}{dx}\right) \cdot \left(\frac{dx}{dt}\right)}$$

La dérivée d'ordre n sera notée : $\frac{d^n f}{dx^n}$

Important : *l'utilisation du point, par exemple $\ddot{x}$, désignera* ***toujours*** *une dérivation temporelle et ne s'utilise jamais avec les lettres i et j qui ont déjà un point.*

Dérivées de fⁿ

$$\frac{d(f^n)}{dt} = n\left(\frac{df}{dt}\right)f^{n-1}$$

Tableaux de dérivées et de primitives*. Les constantes d'intégration ont été omises.*

Tableaux des dérivées et primitives et quelques formules en prime

Fonction	Domaine de dérivabilité	Dérivée
$\ln(x)$	$\mathbb{R}^{+,*}$	$\frac{1}{x}$
e^x	$\mathbb{R}$	e^x
$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$-\frac{1}{x^2}$
$\sqrt{x}$	$\mathbb{R}^{+,*}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}^{+,*}$	$\alpha x^{\alpha-1}$
$\cos(x)$	$\mathbb{R}$	$-\sin(x)$
$\sin(x)$	$\mathbb{R}$	$\cos(x)$
$\tan(x)$	$]-\frac{\pi}{2}+k\pi; \frac{\pi}{2}+k\pi[, k \in \mathbb{Z}$	$1+\tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$
$\arccos(x)$	$]-1;1[$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arcsin(x)$	$]-1;1[$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan(x)$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{1+x^2}$

Opération	Dérivée
$f+g$	$f'+g'$
$f \cdot g$	$f' \cdot g + f \cdot g'$
$\frac{f}{g}$	$\frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$
$g \circ f$	$f' \times g' \circ f$
$\frac{1}{u}$	$-\frac{u'}{u^2}$
u^n	$nu'u^{n-1}$
$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$
e^u	$u'e^u$
$\ln(u)$	$\frac{u'}{u}$
$\sin(u)$	$u'\cos(u)$
$\cos(u)$	$-u'\sin(u)$

Fonction	Intervalle d'intégration	Primitive
$(x-a)^n, n \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{n+1}(x-a)^{n+1}$
$\frac{1}{x-a}, a \in \mathbb{R}$	$]-\infty; a[$ OU $]a; +\infty[$	$\ln(\|x-a\|)$
$\frac{1}{(x-a)^n}, a \in \mathbb{R}, n \geq 2$	$]-\infty; a[$ OU $]a; +\infty[$	$-\frac{1}{(n-1)(x-a)^{n-1}}$
$\cos(ax), a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{a}\sin(ax)$
$\sin(ax), a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$	$\mathbb{R}$	$-\frac{1}{a}\cos(ax)$
$\tan(x)$	$]k\pi - \frac{\pi}{2}; k\pi + \frac{\pi}{2}[, k \in \mathbb{Z}$	$-\ln(\|\cos(x)\|)$
$\ln(x)$	$\mathbb{R}^{+,*}$	$x\ln(x) - x$
$e^{ax}, a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{a}e^{ax}$
$(x-a)^\alpha, a \in \mathbb{R}, \alpha \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$	$]a; +\infty[$	$\frac{1}{\alpha+1}(x-a)^{\alpha+1}$
$a^x, a > 0$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{\ln(a)}a^x$
$\frac{1}{x^2+1}$	$\mathbb{R}$	$\arctan(x)$
$\sqrt{x-a}, a \in \mathbb{R}$	$]a; +\infty[$	$\frac{2}{3}(x-a)^{3/2}$
$\frac{1}{\sqrt{x-a}}, a \in \mathbb{R}$	$]a; +\infty[$	$2\sqrt{x-a}$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$]-1;1[$	$\arcsin(x)$

<u>Développements limités.</u>

Pour une fonction f(x) au voisinage de $x=x_o$, le développement limité de $f(x)=f(x_o+h)$ à l'ordre n, s'il a un sens, est :

$$f(x_o+h)=f(x_o)+\frac{h}{1!}f'(x_o)+\frac{h^2}{2!}f''(x_o)+\cdots+\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x_o)+O(h^n)$$

En physique, on s'arrête généralement à l'ordre 1, rarement à l'ordre 2.

Dans les formulaires, ils sont donnés pour $x_o=0$, liste non exhaustive mais à connaître :

$$e^x=1+x+O(x)$$

$$Ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+O(x^2)$$

$$cos(x)=1-\frac{x^2}{2}+O(x^4)$$

$$sin(x)=x+\frac{x^3}{3}+O(x^5)$$

$$tan(x)=x-\frac{x^3}{6}+O(x^5)$$

$$\boldsymbol{(1+x)^{\alpha}=1+\alpha x+O(x^2)} \qquad \boldsymbol{TRES\ IMPORTANT}$$