M10. De la sinusoïde à la notation complexe.

POUR UN SYSTEME LINEAIRE, si l'excitation e(t) est sinusoïdale de pulsation ω, alors le régime permanent pour s(t) est aussi une sinusoïde de même pulsation ω. MAIS la gestion des fonctions sinusoïdales réelles est LOURDE. On utilisera donc la notation complexe.

Cette propriété permet de reconnaître les systèmes non linéaires.

ATTENTION : le régime permanent est en fait la solution particulière, on attend suffisamment longtemps pour que le régime transitoire disparaisse.

A)Ecriture d'un fonction sinusoïdale : $x(t)=X.\cos(\omega t+\varphi)$

X : considéré positif, AMPLITUDE.

ω : considéré positif, PULSATION en s^{-1}.

φ : à définir sur un intervalle de largeur 2π, phase à l'origine des temps.

On définit aussi $f=\omega/2\pi$ FREQUENCE en Hz et $T=1/f$ PERIODE.

Notion d'avance de phase : $x_1(t)=X_1.\cos(\omega t+\varphi_1)$ $x_2(t)=X_2.\cos(\omega t+\varphi_2)$

L'avance de phase ou phase de x_2 sur x_1 est $(\varphi_2-\varphi_1)$.

Propriétés à connaître :

a)La somme de deux sinusoïdes de même pulsation ω est aussi une sinusoïde de pulsation ω.

b) $x(t)=A\cos(\omega t)+B\sin(\omega t)$ est une sinusoïde de pulsation ω et d'amplitude $\sqrt{A^2+B^2}$.

B)La notation complexe : $\underline{x}(t)=X.\exp[j(\omega t+\varphi)]=\underline{X}.\exp[j\omega t]$

$\underline{x}(t)$: fonction complexe associée à x(t)

$\underline{X}=X.\exp[j\varphi]$ amplitude complexe.

Prop1 : sous réverse des contraintes définies en A, il y a bijection entre x(t) et $\underline{x}(t)$.

Prop2 : dans les mêmes conditions, si ω est fixée, il y a bijection entre x(t) et $\underline{X}$:

$$x(t)=Re(\underline{x}(t))= \text{norme}(\underline{X}).\cos(\omega t+Arg(\underline{X}))$$

Connaître le nombre complexe $\underline{X}$, la fonction $\underline{x}(t)$, la fonction x(t) sont équivalents.

C)Utilisation pratique de la notation complexe.

a)Toute relation additive entre fonctions sinusoïdales réelles de même pulsation ω est vraie avec les fonctions complexes associées et les amplitudes complexes associées.

b)Dériver temporellement en réel revient à multiplier par $j\omega$ en notation complexe.

c) $\cos(\omega t+\varphi)$ en réel $\leftrightarrow$ $e^{j(\omega t+\varphi)}$ en complexe

Application 1 : je veux calculer $f(t)=\cos(\omega t)+2\sin(\omega t+\pi/4)$

En réel, je dois bien connaître ma trigo et cela va être long. Je réécris f(t) avec des cos :

$f(t)=\cos(\omega t)+3\sin(\omega t+\pi/4)= f(t)=\cos(\omega t)+2\cos(\omega t+\pi/4-\pi/2)=\cos(\omega t)+2\cos(\omega t-\pi/4)$

que je peux transformer : $f(t)=Re\left(e^{j\omega t}+2e^{-j\pi/4}e^{j\omega t}\right)=Re\left(\underline{F}e^{j\omega t}\right)$

L'amplitude complexe de f est

$\underline{F}=1+2e^{-j\pi/4}=1+\sqrt{2}(1-j)=1+\sqrt{2}-j\sqrt{2}=Fe^{j\varphi}$

Avec $F=5+2\sqrt{2}\approx 7{,}83$ et $\varphi=-\arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\right)\approx 0{,}53$

On peut maintenant écrire : $f(t)=F.\cos(\omega t+\varphi)$

Rem : les expressions littérales de F et φ peuvent apparaître dans l'expression de f(t), mais absolument pas leurs valeurs numériques approchées. Tout au plus, peut-on écrire :

$$f(t)=F.\cos(\omega t+\varphi) \quad avec \quad F\approx 7{,}83 \quad et\ \varphi\approx 0{,}53$$

<u>Application 2 :</u> je veux écrire la solution permanente de l'EQ :

$$\ddot{x} + 2\lambda\omega_o\dot{x} + \omega_o^2 x = \omega_o^2 E.\cos(\omega t) \qquad EQ$$

où les constantes définies sont toutes réelles positives.

Je sais déjà que la réponse permanente x(t) est une sinusoïde de pulsation ω, mais je n'ai pas son expression. Si on reste en réel, on peut prendre une forme symbolique x(t)=Acos(ωt)+Bsin(ωt) , envoyer cette formule dans EQ, obtenir le système de Cramer vérifié par (A,B) et le résoudre.
Si vous avez beaucoup de temps à perdre, vous pouvez essayer (ça marche).

Mais si vous voulez aller assez vite :
On commence par passer en complexe (a et c) :

$$\underline{\ddot{x}} + 2\lambda\omega_o\underline{\dot{x}} + \omega_o^2\underline{x} = \omega_o^2 E.exp(j\omega t) \qquad EQ\ complexe$$

Puis (b) : $\underline{\dot{x}} = j\omega\underline{x} = j\omega\underline{X}exp(j\omega t)$ *et* $\underline{\ddot{x}} = j\omega\underline{\dot{x}} = -\omega^2\underline{x} = -\omega^2\underline{X}.exp(j\omega t)$

On reporte dans EQ complexe, on simplifie par $exp(j\omega t)$ qui n'est jamais nul et on sort :

$$\underline{X} = \frac{\omega_o^2 E}{\omega_o^2 - \omega^2 + 2j\lambda\omega_o\omega}$$

Si on veut repasser en réel, ce qu'on ne fera pratiquement jamais :

$$x(t) = X\cos(\omega t + \varphi) \quad avec\ X = \|\underline{X}\| = \frac{\omega_o^2 E}{\sqrt{(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + (2\lambda\omega_o\omega)^2}} \quad et\ \varphi = arg(\underline{X})$$

Rem : je n'ai pas exprimé φ, car il y a un petit pb (déjà vu avant d'ailleurs) . Lequel ?

<u>Application 3. Obtention de l'équation différentielle à partir du RSP(ω).</u>
Inverse de l'application 3. On part de la définition de $\underline{X}$ ci-dessus.
$\underline{X}$ représente x(t) ; jω$\underline{X}$ représente $\dot{x}(t)$ et ainsi de suite...
E représente e(t)
On passe le dénominateur au numérateur :

$$(\omega_o^2 - \omega^2 + 2j\lambda\omega_o\omega)\underline{X} = \omega_o^2 E$$

$$\omega_o^2\underline{X} + (j\omega)^2\underline{X} + 2\lambda\omega_o(j\omega\underline{X}) = \omega_o^2 E$$

On repasse en réel :

$$\omega_o^2 x(t) + \ddot{x} + 2\lambda\omega_o\dot{x}(t) = \omega_o^2 e(t)$$

et on réarrange pour la présentation :

$$\ddot{x} + 2\lambda\omega_o\dot{x}(t) + \omega_o^2 x(t) = \omega_o^2 e(t)$$

et on vérifie l'homogénéité. OK.

Remarque : si il y avait eu jω au dénominateur (ce qui revient à une intégration temporelle), on aurait tout multiplié par jω.