M11. La structure spectrale des signaux continus du temps continu.

A)Les signaux périodiques et Fourier.

*Un signal périodique e(t) permanent de période $T_1=1/f_1$ peut être considérée comme la somme **infinie** de sinusoïdes de fréquences successives f_1, $f_2=2f_1$, … $f_n=nf_1$…et d'une constante. Une écriture possible est la suivante en notant $\omega_1=2\pi f_1$:*

$$e(t) = \frac{a_o}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\{a_n cos(n\omega_1 t) + b_n sin(n\omega_1 t)\} = \frac{a_o}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n cos(n\omega_1 t + \varphi_n)$$

Terme constant harmonique d'ordre n

Avec les définitions suivantes :

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T e(t)cos(n\omega_1 t)\,dt \qquad b_n = \frac{2}{T}\int_0^T e(t)sin(n\omega_1 t)\,dt \qquad c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

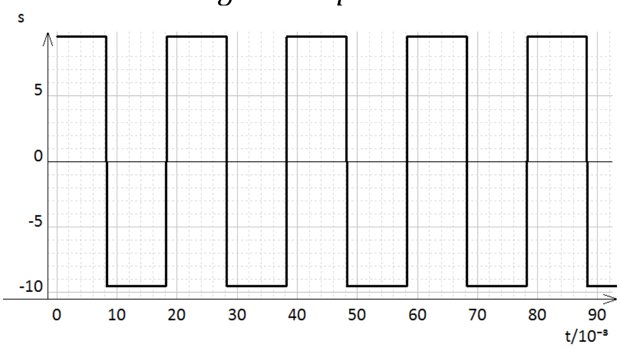
Exemples à connaître :

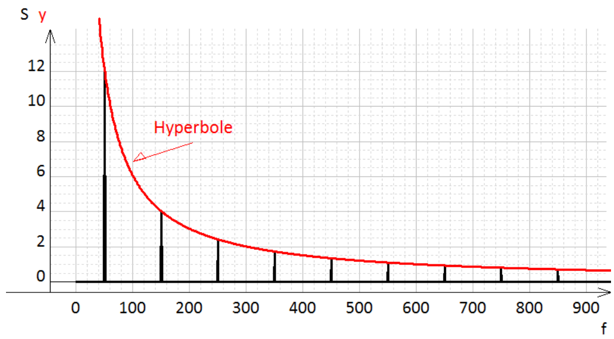
Pour le signal carré, les harmoniques d'ordre pair sont nulles et l'amplitude de l'ordre n impair est proportionnelle à 1/n.

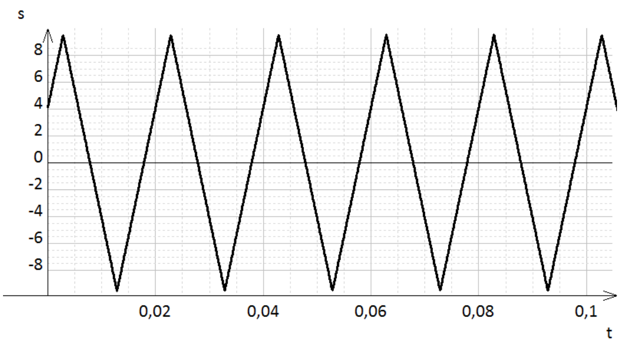
Pour le signal triangulaire, les harmoniques d'ordre pair sont nulles et l'amplitude de l'ordre n impair est proportionnelle à $1/n^2$.

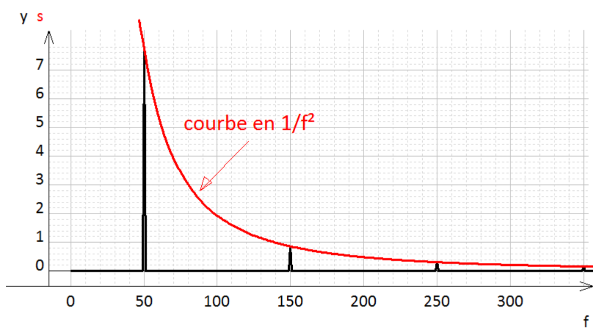
Au passage, le signal carré peut être considéré comme la dérivée temporelle du signal triangulaire.
Graphiquement , on peut dessiner l'aspect telmporel ou l'aspect spectral.
Exemple : signal carré ou triangle 50Hz :

Signal temporel : Spectre partiel :









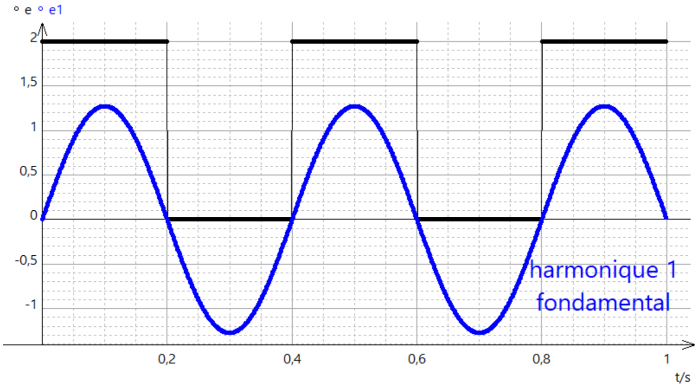
Définitions et propriétés à connaître :

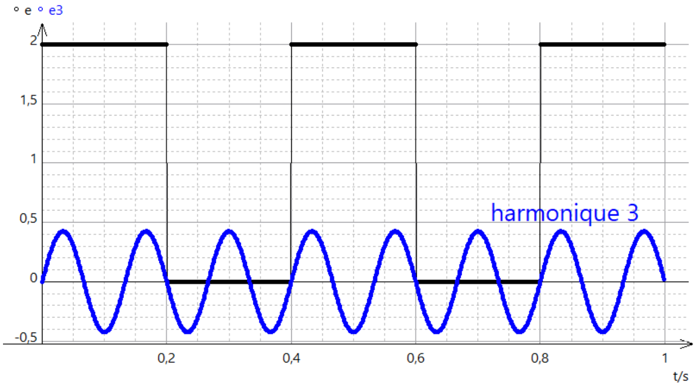
- *La formule peut poser des problèmes en quelques points (discontinuité par exemple).*
- *La description des composantes sinusoïdales présentes constitue le SPECTRE du signal. Pour un signal périodique, le spectre est DISCRET (comme ℕ) et non continu (comme ℝ). Cela signifie que seules certaines fréquences sont présentes.*

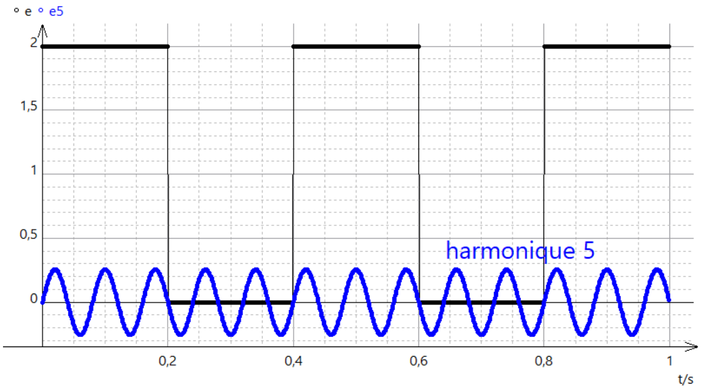
- *Le terme constant* $\frac{a_0}{2} = \frac{1}{T}\int_0^T e(t)\,dt = \langle e(t) \rangle$ *est aussi la valeur moyenne de* $e(t)$ *ou sa composante continue et est considéré comme une sinusoïde de fréquence nulle.*
- *L'harmonique d'ordre 1 est aussi appelée le fondamental.*
- *D'un point de vue mathématique, si une fréquence positive est présente dans le spectre, son opposée l'est aussi. Important pour la partie B.*

- *Une somme finie de sinusoïdes est* C^{∞}*, DONC ne présente pas de discontinuités or un signal carré en a. Donc un comportement violent (comme une discontinuité) doit être assimilé à la présence de composantes sinusoïdales de hautes fréquences. A contrario, un signal évoluant lentement contiendra surtout des basses fréquences.*
  Donc, une discontinuité passant à travers un passe-bas sera :

- *Pour le signal carré, les positions relatives du signal complet et de ses différentes composantes est à connaître et maitriser :*







Placer la composante continue sur chacun des graphes.
Comment aurait-on dessiné une harmonique n quelconque de façon réaliste ?

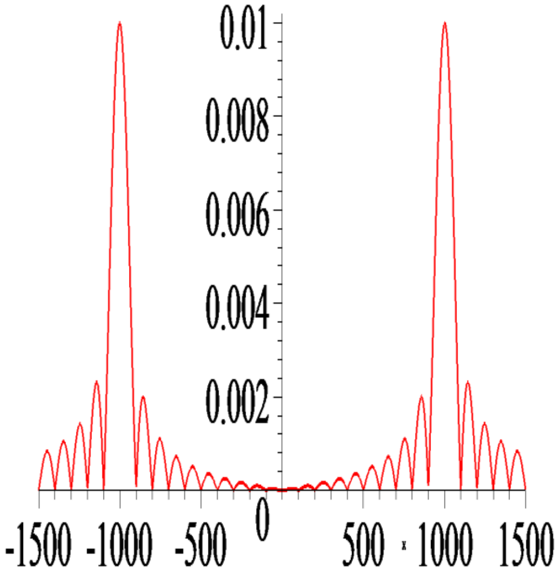
B)Que peut-on dire d'une fonction f(t) définie sur un intervalle fini [t_{min} ; t_{max}] ?

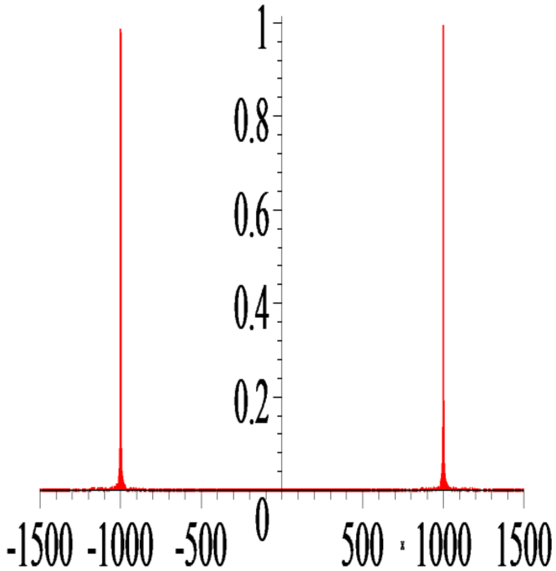
C)Les signaux non périodiques et Fourier: La transformée de Fourier .

Soit g(t) une fonction réelle du temps t. La transformée de Fourier TF en pulsation de g(t), si elle existe, peut être donnée par la formule : $\hat{g}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} g(t).e^{-j\omega t}dt$ *où j est le nombre complexe de module 1 et d'argument +π/2. ω est assimilable à une pulsation et est ici en s^{-1}.*

La transformée de Fourier permet de détecter les composantes sinusoïdales présentes dans la fonction g(t). Il est d'usage de représenter $|\hat{g}(\omega)|$ en fonction de ω, et qu'on appelle SPECTRE EN PULSATION. On utilise plus souvent le spectre en fréquence.

<u>Propriété fondamentale à connaître :</u> le spectre d'une fonction non périodique est généralement continu et non discret comme dans la partie A : l'ensemble des fréquences présentes dans le spectre forme un continuum.
En physique, on ne connaît pas un signal sur une durée infinie, un signal sinusoïdal a donc une durée D. la TF d'un tel signal peut se calculer.
Le spectre en fréquence d'un signal sinusoïdal de fréquence f_0=1000Hz sur une durée D=10ms puis sur D=1s donne deux pics principaux à $-f_0$ et $+f_0$:





La largeur fréquentielle du lobe principal est $\Delta f = \frac{2}{D}$ *et sa hauteur est proportionnelle à D.*

Quand D tend vers l'infini , on obtient 2 pics de Dirac. Expliquer.

Pour votre culture personnelle, il existe la transformée de Fourier inverse TFI qui, dans le cas où elle existe, permet de retrouver g(t) : $g(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{g}(\omega).e^{+j\omega t}d\omega$.