M12. Intégration de relations différentielles.

Sujet très vaste, il importe de savoir par rapport à quoi on intègre donc de faire apparaître les différentielles associées. Avant de se lancer dans les calculs, savoir si l'énoncé demande de le faire. S'il ne le demande pas, c'est :

a)parce qu'on en a pas besoin,
b)parce que c'est trop compliqué ou vous n'avez pas la méthode.

1)Cas le plus simple.NE JAMAIS OUBLIER LES CONSTANTES D4INTEGRATION.

$m\ddot{z} = -g$ *qui conduit à* $m\dot{z} = -gt + A$ *puis à* $mz = -\frac{gt^2}{2} + At + B$

2)Facteur intégrant. Ici $\dot{\theta}/$

Soit $\ddot{\theta} + \omega_o^2 \cdot \sin(\theta) = 0$ *avec* $\omega_o > 0$

$\ddot{\theta}$ *est intégrable par rapport au temps ;* $\omega_o^2 \cdot \sin(\theta)$*est intégrable par rapport à* θ*.*

Mais si on multiplie la relation par $\dot{\theta}$ *, elle devient intégrable par rapport au temps.*

$$\ddot{\theta}\dot{\theta} + \omega_o^2 \cdot \sin(\theta)\dot{\theta} = 0 \quad donne\ \dot{\theta}^2 = 2\omega_o^2 \cdot \cos(\theta) + constante$$

3)Notion de séparation de variables sous forme différentielle.

Soit r(t) une fonction du temps t vérifiant : $r^2\left(\frac{dr}{dt}\right) = -K$ *avec K constante positive et* $r(0)=r_o>0$*.*

On réécrit l'équa diff sous la forme :

$r^2 dr = -Kdt$ *dont l'intégration donne* $\frac{r^3}{3} = -Kt + Cte$

On ne compte qu'une seule constante, et la CI fournie donne $Cte = \frac{r_o^3}{3}$*.*

4)Intégrations successives.

Soit un champ de température T(r), vérifiant : $\frac{d}{dr}\left(r\frac{dT}{dr}\right) = 0$*.*

Il ne faut surtout pas développer la dérivée. On intègre directement par rapport à r :

$$r\frac{dT}{dr} = K_1 \quad soit\ encore\ \frac{dT}{dr} = \frac{K_1}{r} \quad qui\ s'intègre\ en\ T(r) = K_1 Ln\left(\frac{r}{r_o}\right)$$

Rem : j'ai mis la constante d'intégration à l'intérieur du Ln , ce qui est valide d'un point de vue mathématique, et me règle le pb de l'homogénéité d'un point de vue physique : r_o *a la même dimension que r.*