M13. Les vecteurs.

Pour un physicien, un scalaire est représenté par un SEUL nombre réel ou complexe. Un vecteur, ***avec la flèche obligatoire****, est représenté par au moins 2 nombres qui s'appelleront coordonnées. le nombre de coordonnées s'appelle dimension.*

Par exemple, notre espace physique sensible est de dimension 3, et est supposé euclidien. Pour nous repérer dans cet espace muni d'un produit scalaire et d'une norme, nous utilisons généralement les coordonnées cartésiennes (x,y,z) auxquelles on associe une Base OrthoNormée Directe BOND notée $(\vec{\boldsymbol{e}}_x, \vec{\boldsymbol{e}}_y, \vec{\boldsymbol{e}}_z)$ *ou* $(\vec{\boldsymbol{u}}_x, \vec{\boldsymbol{u}}_y, \vec{\boldsymbol{u}}_z)$.

La notation utilisée en SI est ***GANZ VERBOTEN*** *en physique.*

Si nous écrivons $\vec{A}(A_x, A_y, A_z)$ *alors* $A_x = \vec{A}.\vec{e}_x$ ...

$$A = \|\vec{A}\| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$$

Si nous écrivons $\vec{B}(B_x, B_y, B_z)$ *et définissons* α *l'angle entre les deux vecteurs alors :*

<u>Produit scalaire</u> : $\vec{A}.\vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z = A \cdot B \cdot cos(\alpha)$

<u>Produit vectoriel</u> : $\vec{A} \wedge \vec{B}$ *est un vecteur orthogonal à* $\vec{A}$ *et* $\vec{B}$ *, de norme* $A \cdot B \cdot |sin(\alpha)|$*, et tel que* $(\vec{A}, \vec{B}, \vec{A} \wedge \vec{B})$ *forme un trièdre direct.*

Ainsi : $\vec{e}_x \wedge \vec{e}_y = \vec{e}_z$ *et* $\vec{e}_x \wedge \vec{e}_z = -\vec{e}_y$

$$\begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_y B_z - A_z B_y \\ \\ \end{bmatrix}$$ *puis permutation circulaire direct sur les indices .*

Si vous ne maîtrisez pas ces écritures, vous commencez par décomposer les deux vecteurs sur la base cartésienne et utilisez les règles juste au-dessus.

<u>Propriétés fondamentales :</u>

Deux vecteurs orthogonaux ont un produit scalaire nul.
Deux vecteurs parallèles ont un produit vectoriel nul.

<u>Intégration vectorielle.</u>

Les vecteurs peuvent souvent être traitées comme les scalaires dans les équations différentielles. Notations non expliquées mais compréhensibles (non ?) :

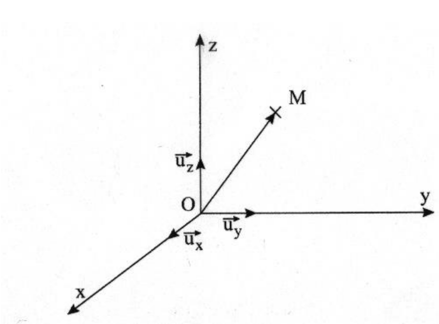
$$\vec{a} = \vec{g} \quad s'intègre\ en \quad \vec{v} = \vec{g}t + \vec{v}_o \quad puis\ en \quad \overrightarrow{OM} = \vec{g}\frac{t^2}{2} + \vec{v}_o t + \overrightarrow{OM_o}$$

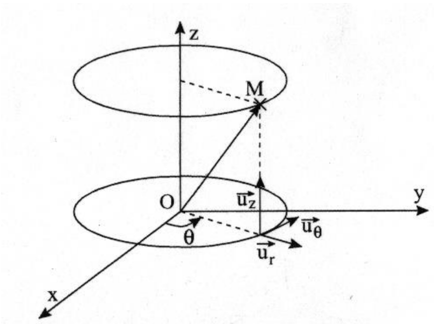
$$m\vec{a} = q\vec{v} \wedge \vec{B}_o \quad donne \quad m\vec{v} = q\overrightarrow{OM} \wedge \vec{B}_o + \vec{K}$$

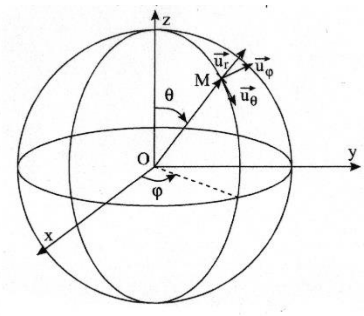
$$\tau \frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{v} = \vec{v}_\infty \quad se\ résoud\ en \quad \vec{v} = \vec{v}_\infty + \vec{K}e^{-t/\tau}$$

M14. Repérage d'un point dans l'espace.

Cartésiennes ***Cylindriques*** ***Sphériques***







Vecteur position $\overrightarrow{OM}$:

$\overrightarrow{OM} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z$ $\overrightarrow{OM} = r\vec{u}_r + z\vec{u}_z$ $\overrightarrow{OM} = r\vec{u}_r$

$x = r \cdot cos(\theta)$
$y = r \cdot sin(\theta)$

$x = r \cdot sin(\theta)cos(\varphi)$
$y = r \cdot sin(\theta)sin(\varphi)$
$z = r \cdot cos(\theta)$

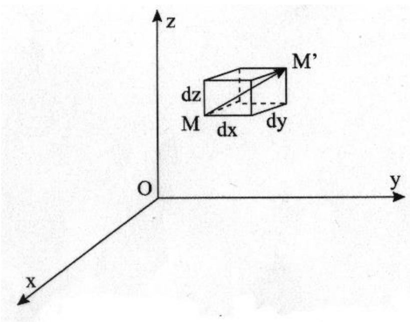
Vecteur vitesse $\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$ en cartésiennes et cylindriques:

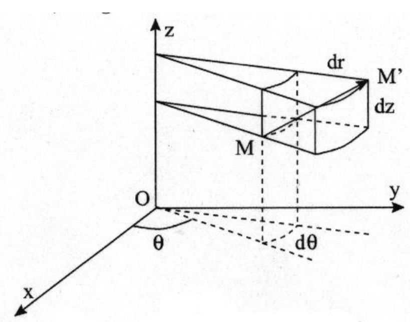
$\vec{v} = \dot{x}\vec{u}_x + \dot{y}\vec{u}_y + \dot{z}\vec{u}_z$ $\frac{d}{dt}\vec{u}_r = \dot{\theta}\vec{u}_\theta$ $\frac{d}{dt}\vec{u}_\theta = -\dot{\theta}\vec{u}_r$ $\vec{v} = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta + \dot{z}\vec{u}_z$

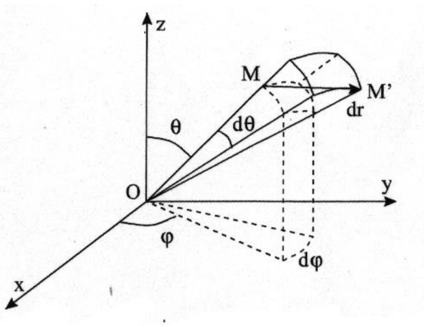
Vecteur accélération $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$ en cartésiennes et cylindriques :

$\vec{a} = \ddot{x}\vec{u}_x + \ddot{y}\vec{u}_y + \ddot{z}\vec{u}_z$ $\vec{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\vec{u}_r + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}\right)\vec{u}_\theta + \ddot{z}\vec{u}_z$

Un déplacement élémentaire se fait sur les trois axes, et on peut représenter un volume élémentaire limiter par des surfaces élémentaires :
A la limite des variations nulles, le volume dessiné devient un parallélépipède rectangle, les arcs de cercle devenant rectilignes, donc les surfaces et volumes sont des produits de côtés.







Déplacement élémentaire

$d\overrightarrow{OM} = dx\vec{u}_x + dy\vec{u}_y + dz\vec{u}_z$ $d\overrightarrow{OM} = dr\vec{u}_r + rd\theta\vec{u}_\theta + dz\vec{u}_z$ $d\overrightarrow{OM} = dr\vec{u}_r + rd\theta\vec{u}_\theta + rsin(\theta)d\varphi\vec{u}_\varphi$

Volume élémentaire. Produit des trois côtés du "cube" dessiné

$d\tau = dx \cdot dy \cdot dz$ $d\tau = (dr)(rd\theta)(dz)$ $d\tau = (dr)(rd\theta)(r \cdot sin(\theta)d\varphi)$

Surface d'un disque de rayon R : πR^2
Surface et volume d'une sphère de rayon R : $4\pi R^2$ et $\frac{4}{3}\pi R^3$
Surface latérale et volume d'un cylindre droit de rayon R et hauteur h : $2\pi Rh$ et $\pi R^2 h$