# *M15. Fonctions de plusieurs variables.*

## *Notation de la dérivée en physique pour une fonction de plusieurs variables.*

*Si f est une fonction de plusieurs variables x,y,z, on notera* $f = f(x, y, z)$ *et on définit trois dérivées partielles d'ordre 1, par exemple* $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{y,z}$*, souvent simplifiée en* $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$ *: dérivée de f par rapport à x en supposant y et z constants. Pour le calcul, il suffit de considérer les variables y et z comme des constantes et d'utiliser les formules habituelles.*

*Exemple :* $f(x, y, z) = x^3y + 3z$ *donne* $\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2y$ *et* $\frac{\partial f}{\partial z} = 3$

*Pour les dérivées partielles d'ordre supérieures, l'ordre de dérivation n'importe pas et la dérivée partielle d'ordre 6, dérivée 1 fois par rapport à x, 2 fois par rapport à y, et 3 fois par rapport à z sera notée :* $\frac{\partial^6 f}{\partial x \partial y^2 \partial z^3}$ *et sera d'ailleurs nulle dans l'exemple ci-dessus.*

*Propriété associée (Théorème de Schwartz) : les dérivées croisées d'ordre 2 sont égales :*

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

*A vérifier sur l'exemple.*

## *Différentielle d'un fonction de plusieurs variables.*

*La formule* $df = \left(\frac{df}{dx}\right) dx$ *,vue pour une fonction d'une variable se généralise aux fonctions de plusieurs variables et devient :*

$$\boldsymbol{df = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{(y,z)} \cdot dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{(x,z)} \cdot dy + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{(x,y)} \cdot dz}$$

## *Différences entre la différentielle d et δ utilisée notamment en thermo.*

*Du fait du théorème de Schwartz vue précédemment avec les fonctions de plusieurs variables, une différentielle de fonction ne peut pas s'écrire n'importe comment.*

*Par exemple, si je cherche f(x,y) telle que :*

$$\boldsymbol{df = 3y \cdot dx + 2x \cdot dy}$$

*il n'y a pas de solution car le théorème de Schwartz n'est pas vérifié :*

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(3y) = 3 \neq \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(2x) = 2$$

*On dit que df n'est pas une différentielle totale exacte.*

*Dans ce cas en physique, on adopte parfois la notation* $\delta$*. Cette distinction est très importante en thermo.*

*Exemple avec le travail élémentaire des forces de pression :* $\delta W = -PdV$

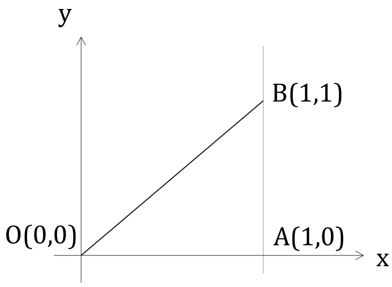
*dW serait une variation de la fonction travail mais la fonction W n'existe pas.*

*δW est une contribution au travail total W qui est donc la somme (intégrale d'un point de vue maths) des travaux élémentaires. On notera donc :*

$$\int_1^2 \delta W = W_{1\to 2} \text{ travail total de } 1 \text{ à } 2 \text{ et non } W_2 - W_1 \text{ variation de travail}$$

*Dans les cas usuels en physique, la distinction n'est pas apparente dans les fonctions d'une seule variable.*

***Exemple pour vérifier.***




*On veut intégrer de O à B une forme différentielle. On choisit d'intégrer :*

*a)sur le segment OB* *b)sur le segment OA puis sur le segment AB*

*1)On essaie avec :* $df = ydx + xdy$.

*On peut remarquer que le théorème de Schwartz est validé, ou plus simplement que* $df = d(xy)$ *donc que f(x,y)=xy+cte. Donc f(1,1)-f(0,0)=1 ne dépend pas du chemin suivi.*

*Vérifions :*

*Sur OB, x=y donc dx=dy , df=2xdx qu'on intègre de 0 à 1 :* $\Delta f=1$.

*Sur OA y=0 et dy=0 donc df=0, f ne varie pas. Sur AB, x=1 donc dx=0 et y varie de 0 à 1, l'intégration donne 1.*

*Les deux résultats sont identiques et valent le premier calcul. On n'a pas besoin de décrire le chemin réel.*

*2)On essaie maintenant avec :* $dg = ydx + 2xdy$

*Ici, le théorème de Schwartz n'est pas vérifié. Donc le résultat dépendra certainement du chemin suivi.*

*Sur le trajet direct OB, la méthode précédente donne dg=3xdx dont l'intégration entre 0 et 1 donne 3/2.*

*Sur le trajet OA, on touve encore 0. Sur le trajet OB, on obtient dg=2dy qu'on intègre entre 0 et 1, ce qui donne 2. Sur AOB, on trouve donc 2 différent de 3/2.*

*Information importante:*

*En thermo, quand vous intégrez dU, dH, dS… de l'état O à l'état B vous êtes dans le cas 1 ; Quand vous intégrez* $\delta W = -PdV$ *de l'état O à l'état B, vous êtes dans le cas 2.*

***<u>Intégration des fonctions de plusieurs variables (application en rouge).</u>***

*Soit u=u(x,y) telle que :* $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = f(x,y)$ *et* $\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = g(x,y)$

*Vérification : il faut forcément* $\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)$ *sinon la fonction u(x,y) n'existe pas. A vérifier sur le cas pratique.*

*On intègre la première à y=cte, ce qui fait que la constante d'intégration dépendra de y. Si F(x,y) est une primitive de f(x,y) par rapport à x, on a donc :* $u(x,y) = F(x,y) + K(y)$

*On remporte maintenant le résultat dans la seconde relation :* $g(x,y) = \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right) + \frac{dK}{dy}$

*ce qui permet de sortir* $\frac{dK}{dy} = K'(y) = \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)$ *et de trouver la fonction K(y), à une constante près.*

<u>Exemple 1</u> : $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = xy$ et $\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{x^2}{2} + y^2$.

*On intègre la première par rapport à x (à y constant) ce qui donne :* $u(x,y) = \frac{x^2 y}{2} + K(y)$

*On reporte dans la seconde :* $\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{x^2}{2} + K'(y) = \frac{x^2}{2} + y^2 \quad d'\text{où} \quad K(y) = \frac{y^3}{3} + cte$

*et donc :* $u(x,y) = \frac{x^2 y}{2} + \frac{y^3}{3} + cte$

<u>Exemple</u> : f(z,t) vérifie $\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right) = \cos(\omega t - kz)$

On intègre facielement par rapport au temps. Comme on intègre à z constant, la constante d'intégration dépend en fait de z ( dériver le résustat obtenu pour vérifier ) :

$$f(z,t) = \frac{1}{\omega}\sin(\omega t - kz) + K(z)$$