M16. Les équations aux dérivées partielles EDP ou PDE en anglais.

Cas les plus simples : x,y, ou z désignent les coordonnées cartésiennes d'une position , t désigne le temps. Δ désigne l'opérateur LAPLACIEN.

En physique, trois équations aux dérivées partielles sont fondamentales :

Equation de Laplace.

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

L'ensemble des solutions forme un espace vectoriel. Mais on ne connaît pas toutes les solutions. Cependant, on a pu démontrer le théorème d'unicité :

unicité de la solution pour un problème « bien posé ».

Donc, si on intuite une solution à un problème donné, et que ça marche, alors on a trouvé LA solution au problème.

Equation de diffusion (ou de la chaleur) unidimensionnelle.

$$\left(\frac{\partial \theta}{\partial t}\right) = D\left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}\right) \quad \text{avec } D \text{ constante positive}$$

Vérifier que D est en $m^2.s^{-1}$.

Si on connaît certaines solutions de cette EDP, on ne connaît pas l'ensemble des solutions. Cet ensemble a une structure d'espace vectoriel.
On est donc obligé d'intuiter une forme de solution possible pour un probème donné. Par exemple, on peut montrer que la fonction erreur erf définie par:
$\boldsymbol{erf(u) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^u exp(-\xi^2)d\xi}$ *est solution de l'équation de diffusion avec* $\xi = \frac{x}{2\sqrt{Dt}}$.

Equation de d'Alembert (ou équation d'onde) unidimensionnelle scalaire s(x,t).

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} \quad \text{où } c \text{ est une constante réelle positive}$$

Quelle est l'unité de c ?

On connaît toutes les solutions de cette EDP : $s(x,t) = f\left(\alpha = t - \frac{x}{c}\right) + g\left(\beta = t + \frac{x}{c}\right)$
où f et g sont des fonctions quelconques dérivables 2 fois.

Exemples : les fonctions $s(x,t) = s_o cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)\right]$ *et* $s(x,t) = s_o cos\left[\omega\left(t + \frac{x}{c}\right)\right]$ *sont des solutions possibles.*

Il existe aussi : *d'Alembert 3D scalaire :* $\Delta s = \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 s}{\partial t^2}$

d'Alembert 3D vectorielle : $\Delta\vec{E} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$

dont on connaît seulement certaines solutions. Le laplacien Δ est défini plus loin dans ce document.