M06. Equation différentielle temporelle linéaire d'ordre n à coefficients constants.

A)Cas général.

L'équation EQ vérifiée par x(t) peut s'écrire :

$$\sum_{k=0}^{k=n} a_k x^{(k)}(t) = e(t) \qquad EQ$$

Le second membre représente l'excitation e(t), le premier membre est associé à la réponse x(t). Le régime libre physique (sans excitation) correspond mathématiquement à l'équation homogène EQH dite aussi sans second membre.

Propriétés à connaître absolument :

Prop1: *l'ensemble des solutions de EQ est composée de la somme de l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée EQH (e(t)=0, régime libre d'un point de vue physique) et d'UNE solution particulière de EQ.*

Prop2 : *l'ensemble des solutions de EQH est un espace vectoriel de dimension n. Il suffit donc de trouver n solutions indépendantes pour obtenir une base des solutions de EQH.*

Si on cherche des solutions en exp(rt), l'EQH se transforme en polynôme P(r) de degré n qui , dans le corps des complexes, a n solutions distinctes ou non. En physique, sauf situation exceptionnelle, on a n solutions distinctes r_k réelles ou complexes , k variant de 1 à n. L'ensemble des solutions de EQH s'écrit donc :

$$x_H(t) = \sum_{k=1}^{k=n} \underline{A}_k . exp(r_k t)$$

où les constantes $\underline{A}_k$ (dites aussi constantes d'intégration) sont a priori complexes.

Prop3 : notion de système stable : *en physique, un système est dit stable si son mouvement est borné dans le temps. Cela implique que les solutions du polynome doivent être à partie réelle négative.*

Prop4 : notion de régime permanent : *pour un système stable, au bout d'un certain temps à définir, seule subsiste la solution particulière qui prend le nom de régime permanent.*

Exemple d'application purement numérique, mais dont les résultats généraux sont à maîtriser:

$$\dddot{x}(t) + 2\ddot{x}(t) - \dot{x}(t) - 2x(t) = -2$$

ou x est une grandeur physique sans dimension et $t = \frac{temps}{\tau}$ où τ est une durée de référence. Donc t n'a pas d'unité non plus.

a)Une solution particulière est $x_P(t) = +1$

b)Pour la solution générale sans second membre, on intuite $x(t) = A.exp(rt)$ dans EQH avec A non nul. EQH devient alors un polynome en r de degré 3 :

$$r^3 + 2r^2 - r - 2 = 0$$

Il y a une solution évidente r=1, ce qui permet de factoriser et de trouver les deux autres racines :

$$(r-1)(r^2+3r+2) = (r-1)(r+1)(r+2) = 0$$

Nous avons trois solutions pour r, donc ous avons trouvé trois solutions différentes de EQH, espace vectoriel de dimension 3. Les trois solutions forment un système libre qui est donc aussi une base de EQH. Toute solution de EQH est une combinaison linéaire des trois solutions trouvées.

c)En comptant la solution particulière, la solution générale de EQ s'écrit :

$$x(t) = +1 + A.exp(t) + B.exp(-t) + C.exp(-2t)$$

Où A,B,C sont les constantes d'intégration. Pour les obtenir, il nous faut des informations supplémentaires, généralement sur l'état initial.

d)Le système est instable à cause de la première exponentielle.

M07. Ordre 1 à coefficients constants.

1)Sans second membre.

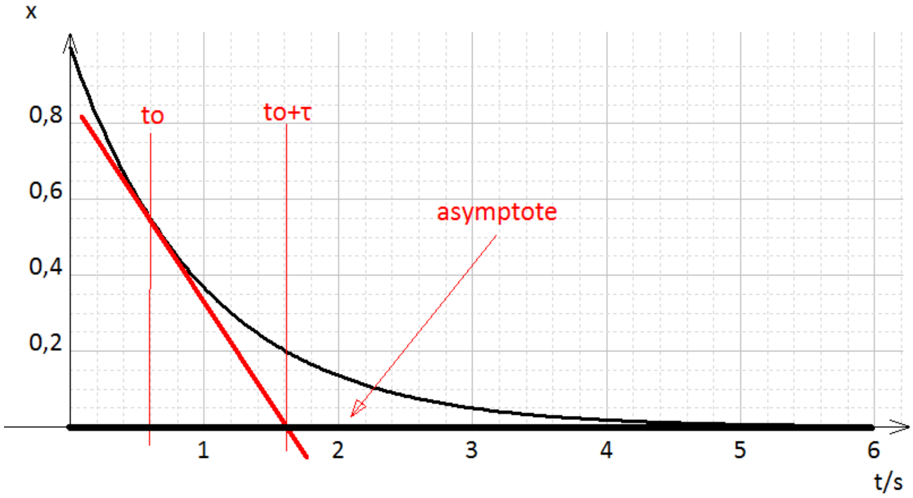
La forme générale d'une EQH d'ordre 1 peut être :

$$\tau\dot{s} + s = 0$$

On a un système stable pour τ>0.

L'écriture de la solution est $s_H(t) = A.exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$ *où A est une constante d'intégration qu'on trouvera avec les conditions initiales.*

Propriété intéressante : *en un point quelconque, la droite tangente rencontre l'asymptote au bout du temps τ :*



2)Avec second membre constant e(t)=E.

Charge de condensateur sous tension constante par exemple.

$$\tau\dot{s} + s = E$$

Il faut ajouter la solution permanente $s_P(t) = E$ *.*

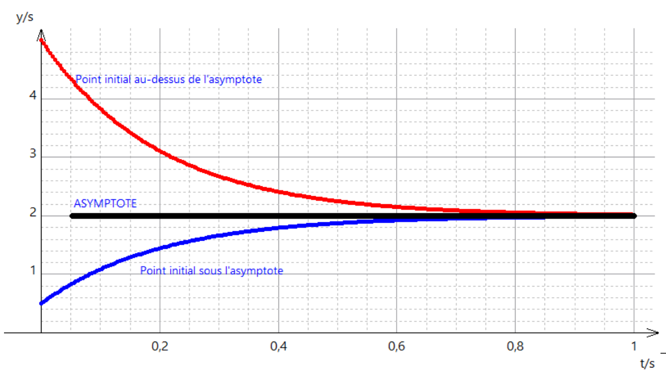
$$s(t) = s_H(t) + s_P(t) = A.exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + E$$

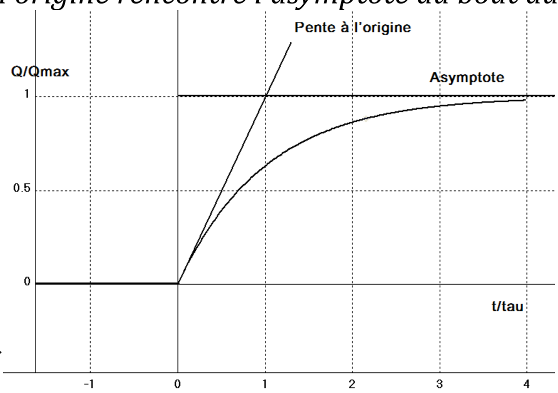
Avec la CI s(0), on obtient :

$$s(t) = (s(0) - E).exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + E$$

Dession de gauche : la solution est croissante si s(0)<E (courbe bleue), décroissante sinon (courbe rouge).

Dessin de droite avec départ à s(0)=0. La pente à l'origine rencontre l'asymptote au bout du temps τ.





M08. EQH ordre 2 sans terme d'ordre 1.

***A)**Soit s(t) vérifiant* $\boxed{\boldsymbol{\ddot{s} - \omega_o^2 s = 0}}$ *avec* $\omega_o > 0$.

On peut prendre la fonction nulle comme solution particulière.
Pour EQH, on doit trouver 2 solutions libres formant une base de l'ensemble des solutions. On cherche s sous la forme A.exp(rt), A non nul,
ce qui donne les deux solutions réelles $r_1 = \omega_o$ *et* $r_2 = -\omega_o$
On a trouvé une base des solutions.

Une solution quelconque est une combinaison linéaire des deux solutions trouvées et s'écrit donc :

$$s(t) = A.e^{+\omega_o t} + Be^{-\omega_o t}$$

On obtient toujours un système instable.

***B)** Soit s(t) vérifiant* $\boxed{\boldsymbol{\ddot{s} + \omega_o^2 s = 0}}$ *avec* $\omega_o > 0$. *OSCILLATEUR HARMONIQUE*

On peut prendre la fonction nulle comme solution particulière.
Pour EQH, on doit trouver 2 solutions libres formant une base de l'ensemble des solutions. On cherche s sous la forme A.exp(rt), A non nul,
ce qui donne les deux solutions purement imaginaires $r_1 = j\omega_o$ *et* $r_2 = -j\omega_o$

Une solution quelconque dans $\mathbb{C}$ *s'écrit donc :*

$$s(t) = \underline{A}.e^{+j\omega_o t} + \underline{B}e^{-j\omega_o t}$$

Si s(t) est un signal réel, la résolution avec CI réelles conduira à $\underline{A}$ *et* $\underline{B}$ *complexes conjugués. Les solutions s(t) réelles sont des sinusoïdes de pulsation* ω_o*. Du fait de la trigonométrie, on peut proposer plusieurs écritures pour s(t) :*

$$s(t) = \lambda.cos(\omega_o t) + \mu.sin(\omega_o t)$$
$$s(t) = S.cos(\omega_o t + \varphi) \quad avec \quad S \geq 0$$
$$s(t) = S.sin(\omega_o t + \psi) \quad avec \quad S \geq 0$$

On préfère généralement la première écriture qui ne donne qu'une seule solution pour le couple (λ, μ) *alors qu'on a toujours des problèmes pour exprimer les angles. On pourra ensuite calculer l'amplitude S de s(t) par :* $S = \sqrt{\lambda^2 + \mu^2}$.

M09. EQH ordre 2 avec terme d'ordre 1.

La forme générale est : $\boldsymbol{\ddot{s} + b\dot{s} + cs = 0}$
Où b et c sont réels strictement non nuls. Un des deux nuls correspond à un cas déjà vu ci-dessus.

La résolution ne présente d'intérêt que dans le cas des systèmes stables : le polynome associé doit posséder des racines à valeur réelle négative.
Vous POUVEZ démontrer (quand même un peu de boulot) ou DEVEZ connaître :

SYSTEME STABLE correspond à b et c POSITIFS

*Une forme d'écriture de l'EQH **stable** d'ordre 2 sera la suivante, en incluant l'oscillateur harmonique :*

$$\ddot{s} + \frac{\omega_o}{Q}\dot{s} + \omega_o^2 s = 0 \qquad avec \qquad Q > 0 \; et \; \omega_o > 0.$$

Si la variable de dérivation désigne le temps , alors ω_o *est une pulsation en* s^{-1} *et Q , généralement appelé facteur de qualité, n'a pas d'unité. On peut aussi rencontrer :*

$\ddot{s} + 2\lambda\omega_o\dot{s} + \omega_o^2 s = 0$ *ou* $\ddot{s} + \frac{2}{\tau}\dot{s} + \omega_o^2 s = 0$ où *les constantes sont toutes positives*

Reprenons une écriture symbolique d'une EQH d'ordre 2 d'un système stable :

$$\boxed{\ddot{s} + \frac{\omega_o}{Q}\dot{s} + \omega_o^2 s \; = \; 0} \qquad \text{avec} \qquad Q > 0 \; et \; \omega_o > 0.$$

<u>*Recherche d'une base des solutions.*</u> Il faut trouver deux solutions libres.
Si on cherche des solutions en exp(rt), l'EQH se transforme en polynôme P(r) de degré 2 :

$$r^2 + \frac{\omega_o}{Q} r + \omega_o^2 \; = \; 0 \qquad \Delta = \frac{\omega_o^2}{Q^2}(1 - 4Q^2)$$

qui a donc deux solutions différentes r_+ et r_- dans C (sauf dans le cas Q=1/2 où il faudra trouver une autre solution). On a donc une base des solutions et l'ensemble des solutions s'écrit alors :

$$s(t) = A.exp(r_+ t) + B.exp(r_- t) \text{ ou } A \text{ et } B \text{ sont des constantes a priori complexes.}$$

Regardons de plus près les différents cas :

a) $Q < {}^{1}\!/_{2}$ *. Les deux solutions sont réelles : régime apériodique. PAS D'OSCILLATIONS.*

$$r_\pm = -\frac{\omega_o}{2Q}\left(1 \pm \sqrt{1 - 4Q^2}\right) \qquad s(t) = A.exp(r_+ t) + B.exp(r_- t)$$

b) $Q > {}^{1}\!/_{2}$*. Les deux solutions sont imaginaires conjuguées. Régime pseudo-périodique. OSCILLATIONS SINUSOIDALES D'AMPLITUDE DECROISSANTE. Les calculs donnent :*

$$r_\pm = -\frac{\omega_o}{2Q} \pm j\frac{\omega_o}{2Q}\sqrt{4Q^2 - 1} = -\frac{\omega_o}{2Q} \pm j\omega$$

Les solutions dans C s'écrivent : $\quad s(t) = \left\{\underline{A}.e^{+j\omega t} + \underline{B}.e^{-j\omega t}\right\}e^{-\frac{\omega_o}{2Q}t}$

Il faut maintenant extraire les solutions réelles id est celles telles que $s = s^*$ ce qui conduit à $\underline{A}$ et $\underline{B}$ complexes conjuguées. En écrivant $\underline{A} = Ae^{j\varphi}$, on obtient une écriture possible de s :

$$s(t) = \{A\cos(\omega t + \varphi)\}e^{-\frac{\omega_o}{2Q}t}$$

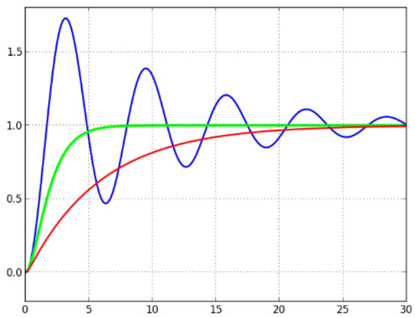
Sinusoïde de pulsation ω dont l'amplitude décroît exponentiellement avec le temps.

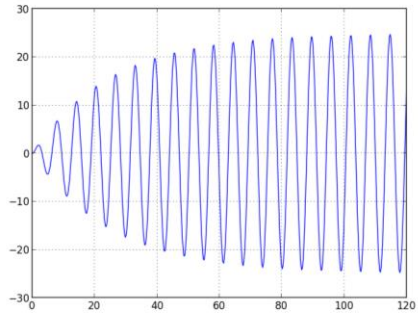
c) $Q = {}^{1}\!/_{2}$*. Régime critique, SANS OSCILLATIONS. Solution double $r = -\omega_o$. Il faut trouver une seconde solution à EQH, par exemple, $te^{-\omega_o t}$. Une solution quelconque de l'EQH s'écrit :*

$$s(t) = (At + B)e^{-\omega_o t}.$$

<u>***Exemples graphiques avec second membre constant ou sinusoïdal :***</u>

A gauche, établissement d'un régime permanent continu dans les trois cas principaux.
A droite, établissement d'un régime permanent sinusoïdal dans le cas λ<1.





<u>*A retenir :*</u>

Au bout d'un certain temps à définir, il ne reste que la solution particulière qui est le régime permanent (continu à gauche, sinusoïdal à droite)

Le régime critique (courbe verte) est considéré comme le régime transitoire le plus court.

La résolution complète est longue et le risque d'erreur est élevé sur l'obtention des constantes d'intégration. Cette résolution est généralement non nécessaire.