

# Étude d'oscillations non linéaires avec un smartphone

## Période et portrait de phase

par Cédric JAI

La prépa des INP - 33400 Talence  
cedric.jai@bordeaux-inp.fr

et Kévin CAIVEAU

La prépa des INP - 33400 Talence  
kevin.caiveau@bordeaux-inp.fr

**A**VEC UN DISPOSITIF expérimental relativement simple, composé d'un pendule et d'un smartphone, cet article aborde les notions de portraits de phase et d'oscillations non linéaires. L'influence de l'angle initial de lâcher du pendule sur la période d'oscillation sera mesurée en une seule expérience de trois minutes environ. Les résultats seront ensuite comparés aux modèles de Borda, mais aussi à une intégration numérique de l'équation du mouvement. Les limites de l'étude seront enfin mises en évidence. Les résultats des mesures nécessitant un post-traitement pour être utilisées, le langage de programmation Python a été choisi afin de laisser la possibilité aux étudiants de coder eux-mêmes quelques lignes ou la totalité des méthodes numériques nécessaires. On détaillera également l'efficacité de quelques bibliothèques de ce langage pour obtenir certaines fonctionnalités.

## INTRODUCTION

L'oscillateur harmonique tient une place particulière en physique puisqu'il décrit le mouvement de tout système conservatif écarté d'une position d'équilibre stable [1]. Une étude expérimentale d'un tel mouvement est possible, mais reste délicate puisqu'il faut s'affranchir des frottements rendant le système non conservatif [2]. Une réalisation rapide, mais approximative, d'un tel oscillateur, est l'utilisation d'un pendule. Cependant, cette possibilité n'est pertinente qu'aux oscillations suffisamment faibles pour négliger tout effet non linéaire [3].

Dans cet article, plutôt que d'utiliser le pendule comme une approximation d'un oscillateur harmonique, nous proposons, au contraire, d'étudier quantitativement différents aspects de la non-linéarité des oscillations. L'utilisation d'un téléphone portable et d'un langage de programmation rendra, non seulement, la manipulation attractive pour les étudiants, mais aussi, évitera l'aspect répétitif d'une telle étude [4-5]. De nombreux auteurs proposent déjà d'utiliser les téléphones pour faire de la physique, c'est la « smartphonique » [6-7] ; nous proposons d'aller plus loin que les réalisations proposées

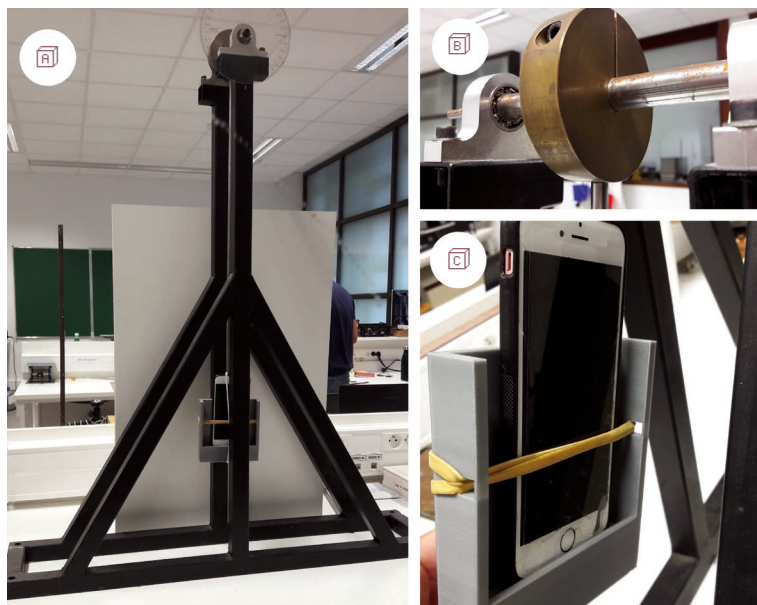
en étudiant ici les limites de la linéarité des oscillations. L'intégralité du code développé pour cet article est fournie pour téléchargement.

Cette expérience complétera une première étude, souvent réalisée dans l'enseignement secondaire, avec un chronomètre ou une analyse vidéo [8]. Cette dernière et son interprétation sont donc destinées à un public de première année d'enseignement supérieur, voire celui de la préparation à l'agrégation.

## 1. CONSTRUCTION DU PORTRAIT DE PHASE

### 1.1. Dispositif

Le pendule pesant (cf. figure 1) est composé d'une tige en métal supportant une nacelle en plastique réalisée avec une imprimante 3D. Cette nacelle permet de maintenir un smartphone, ici un iPhone 6s, lors d'une révolution complète du pendule. À l'autre extrémité de la tige, des roulements à billes permettent de minimiser les frottements de liaison (leur présence est cependant nécessaire pour notre étude rapide). Le châssis supportant le pendule est une structure métallique triangulaire.



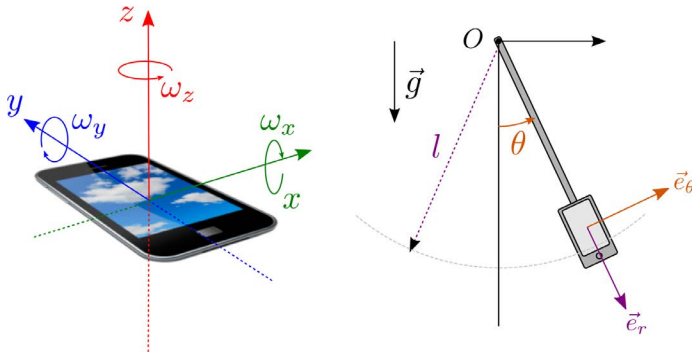
**Figure 1** - Dispositif expérimental : (A) Vue d'ensemble, le pendule est en position verticale « basse » - (B) Fixation de la tige et roulements à billes - (C) Nacelle et smartphone.

Le smartphone est utilisé comme capteur [9-10] : il sert à déterminer l'évolution

temporelle de l'angle de la tige par rapport à la verticale à partir de la vitesse angulaire.

## 1.2. Protocole et acquisition des données

Le téléphone est équipé de l'application *Phyphox* [11] permettant d'accéder aux capteurs du smartphone et d'exporter les données dans un fichier utilisable par un ordinateur. Un des avantages de cette application est qu'elle est multiplateforme : disponible sur iOS et Android. Le fichier peut être envoyé par mél. ou les graphiques de l'application peuvent être directement affichés sur l'ordinateur *via* un simple navigateur Internet [12]. Les données sont alors récupérées sur la forme d'un fichier CSV (*Comma-separated values*) lisible par n'importe quel tableur. Le capteur qui nous intéresse ici est le gyroscope et particulièrement la composante sur l'axe  $z$  (cf. figure 2). Ce capteur n'est pas présent sur tous les smartphones. Des mesures ont été effectuées avec les accéléromètres, mais elles restent plus bruitées et plus difficiles à interpréter pour les étudiants (prise en compte de la projection de la constante de pesanteur, doublement de période sur la composante radiale...).



**Figure 2** - Axes  $x$ ,  $y$ ,  $z$  du téléphone et angle de rotation  $\theta(t)$  défini par rapport à la verticale descendante et dans le sens antihoraire.

On réalise l'acquisition temporelle de la vitesse angulaire en lâchant le pendule, sans vitesse initiale, avec un angle initial  $\theta_0$  connu. Seul le signal sur l'axe  $z$  donné par *Phyphox* sera conservé. Les valeurs des trois composantes de la vitesse angulaire en fonction du temps montrent d'ailleurs que la composante en  $z$  est bien celle de la rotation. L'application est déclenchée un peu avant le lâcher afin de ne perdre aucun point lors du début du mouvement. Les points inutiles seront supprimés informatiquement. On utilise ici uniquement des angles de lâcher pouvant être utilisés sans rapporteur ( $90^\circ$  ou  $180^\circ$ ). Enfin, la période d'échantillonnage est choisie à 10 ms pour une période d'oscillation pouvant varier de 1,5 s à 2,5 s.

### 1.3. Extraction de l'angle et portrait de phase

Que ce soit par l'accéléromètre ou par le gyroscope, on n'accède pas à la valeur de  $\theta$  (cf. figure 2, page précédente), mais à sa dérivée première ou seconde. Le gyroscope nous donnant l'évolution de  $\omega(t)$ , il faut alors intégrer numériquement le signal. Ce post-traitement des données est réalisé avec le langage de programmation *Python* [13].

*Python* possède déjà des bibliothèques pour réaliser cette opération, mais il peut être intéressant de demander à l'étudiant de coder lui-même cette intégration et de discuter avec lui des erreurs numériques suivant la méthode choisie : rectangle et point milieu, trapèze, Simpson...

Pour notre part, nous avons choisi la méthode la plus simple possible qui calcule l'intégrale par la méthode simplifiée des rectangles sans prendre la moyenne géométrique des points  $(t_k, \omega_k)$  et  $(t_{k+1}, \omega_{k+1})$ . On peut alors demander à l'étudiant d'avoir un œil critique sur la méthode proposée : pourquoi dans notre cas, cette méthode est-elle robuste ? L'échantillonnage est-il satisfaisant ? Pourquoi les erreurs numériques se compensent-elles ?, etc. On peut également lui demander comment l'améliorer. Cette expérience peut donner lieu à une problématique de départ en enseignement d'informatique.

Dans la méthode retenue, l'intégrale continue est remplacée par une somme discrète (cf. figure 3, page ci-contre) :

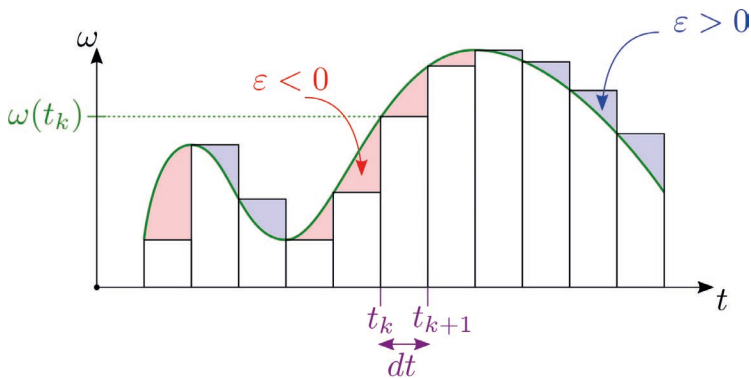
$$\theta(t) = \int_{t=0}^t \omega(t) dt + \theta_0 \rightarrow \theta(t_k) = \sum_{k=0}^{N-1} \omega(t_k)(t_{k+1} - t_k) + \theta_0.$$

Le code python permettant de réaliser cette opération est très simple.

```
-----
t_int = np.array([])
theta = np.array([])
res = 0.
for i in range(len(omega)-1):
    res = omega[i]*(t[i+1]-t[i]) + res           # Intégration avec la méthode des rectangles
    t_int = np.append(t_int, t[i])              # 1 point de moins lors de l'intégration
                                                # (reconstruction du temps)

    theta = np.append(theta, res)
theta0 = -np.pi                                # angle initial de lâcher
theta = theta + theta0
-----
```

Il faut toutefois connaître l'angle de lâcher à l'instant initial pour réaliser cette intégration. L'idée, afin de minimiser les erreurs, est de prendre un angle suffisamment grand et caractéristique à l'œil :  $\theta_0 = 90^\circ$  ou  $\theta_0 = 180^\circ$ .



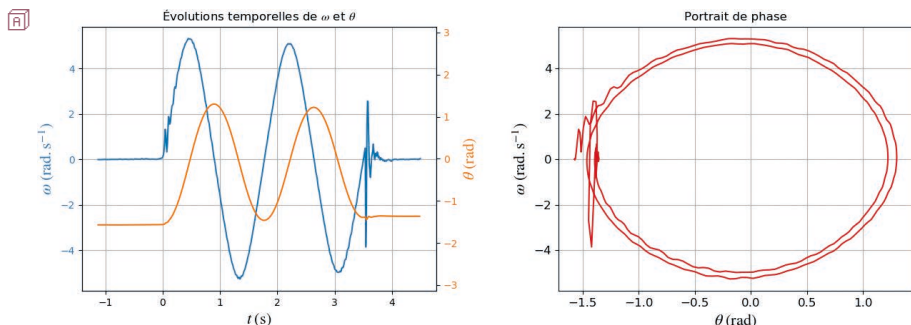
**Figure 3** - Principe de l'intégration numérique : le calcul de l'intégrale est remplacé par un calcul d'aire sur le signal échantillonné (méthode simplifiée des rectangles). La valeur  $\varepsilon$  représente l'erreur numérique lors de chaque incrément de l'opération. Comme le signal est une sinusoïde amortie, l'erreur totale reste faible.

Les figures suivantes présentent les résultats obtenus avec un angle de lâcher de  $90^\circ$  (cf. figure 4A, page ci-après) et de  $180^\circ$  (cf. figure 4B, page ci-après). Pour l'angle de lâcher de  $90^\circ$ , le mouvement a été stoppé après deux oscillations alors que pour l'angle de lâcher de  $180^\circ$ , le mouvement n'a pas été interrompu.

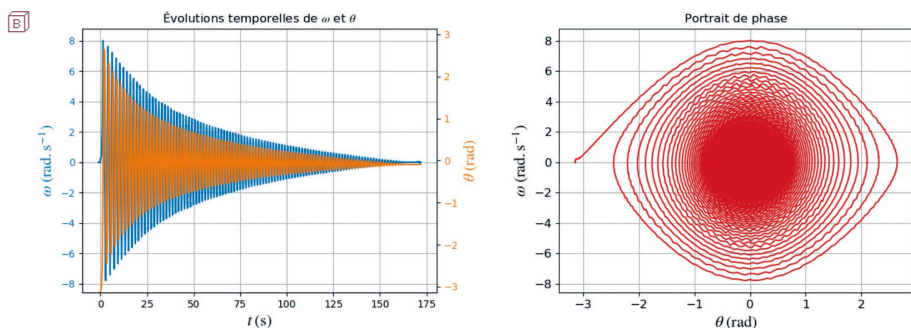
Pour le lâcher à  $90^\circ$ , on remarque qu'au bout de deux périodes, l'oscillateur ne repasse pas par la même trajectoire dans le diagramme de phase. Cette trajectoire est caractéristique d'un amortissement qui est confirmé par l'évolution temporelle de l'angle qui ne reprend pas la même valeur minimale.

La seconde expérience met en évidence la non-linéarité des oscillations dans le diagramme de phase. Les frottements font converger le mouvement vers l'attracteur ( $\theta = 0, \omega = 0$ ). Cette atténuation de l'amplitude des oscillations est mise à profit dans la partie suivante pour étudier l'évolution de la période en fonction de l'angle de lâcher. On remarque enfin, qu'au bout d'un temps suffisamment long, on arrive à une valeur de  $\theta$  qui ne tend pas vers zéro : il existe un tout petit décalage qui est dû aux erreurs numériques de l'intégration pour retrouver  $\theta$  ainsi qu'à l'incertitude sur l'angle de lâcher. Ce décalage peut être évité en effectuant une soustraction de la valeur moyenne, mais nous préférons la mettre en évidence pour une discussion avec les étudiants.

Pour aller plus loin lors d'une séance de travaux pratiques ou de projet, on peut proposer une comparaison des portraits de phase énergétiques expérimentaux avec une résolution numérique de l'équation différentielle du mouvement, avec ou sans amortissement. Il faudra alors mesurer le moment d'inertie du système ainsi que la position de son centre de masse, mais cela dépasse l'objectif principal de cet article. On veut seulement montrer ici les données que l'on peut obtenir avec ce dispositif.



**Figure 4A** - Calcul de  $\theta$  (gauche) et portrait de phase (droite) de deux oscillations pour un angle de lâcher de  $90^\circ$ .



**Figure 4B** - Calcul de  $\theta$  (gauche) et portrait de phase (droite) pour un angle de lâcher de  $180^\circ$ .

## 2. ÉTUDE DE LA PÉRIODE EN FONCTION DE L'ANGLE DE LÂCHER

L'étude de la période d'un pendule en fonction de l'angle initial de lâcher est soit répétitive, soit approximative. Nous proposons ici d'extraire la période de chaque oscillation et de mesurer l'angle maximal correspondant pour réaliser cette étude en une seule fois. Ainsi, tout se passe comme si, moyennant le fait que l'amortissement ne soit pas trop important sur une oscillation, nous avons réalisé plusieurs expériences correspondant à plusieurs angles initiaux de lâchers différents.

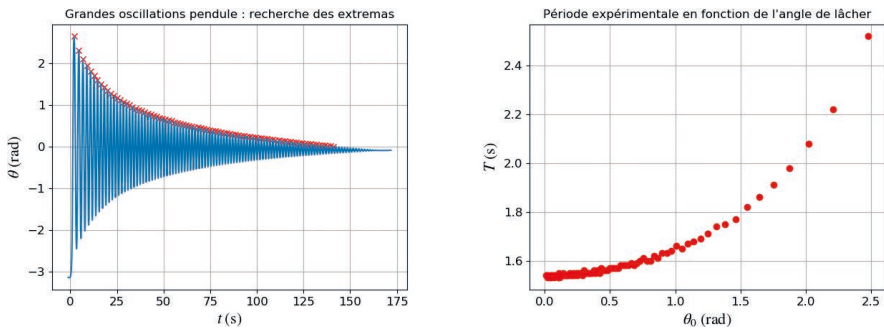
### 2.1. Méthode numérique

La recherche des maxima a été réalisée avec la bibliothèque «`find_peaks`» de «`scipy.signal`» du langage *Python*. Elle permet de récupérer le temps et l'amplitude des maxima de  $\theta(t)$ . Une simple soustraction permet alors de récupérer la période.

L'angle initial de lâcher est pris comme la moyenne des angles maxima obtenus sur une période  $\theta_{0,i} = \frac{\theta_{\max,i} + \theta_{\max,i+1}}{2}$ . On peut éventuellement poser la question suivante aux étudiants : Quel serait le gain d'utiliser les maxima et les minima sur la précision de la détermination de la période ? Et sur la précision de l'angle de lâcher ?

Ici encore, on peut également proposer aux étudiants de coder eux-mêmes la recherche des maxima et de discuter avec eux de la limite de la méthode numérique : effet du bruit sur le signal, effet d'un seuil pour la recherche d'un maximum local...

On remarque (cf. figure 5) la croissance de la période de l'oscillation en fonction de l'angle de lâcher ainsi que l'isochronisme des petites oscillations pour des angles suffisamment faibles. La période de l'oscillateur varie de 1,53 s à 2,52 s alors que les frottements imposent une durée totale de mise en oscillation de 175 s. Si on suppose un amortissement fluide, l'arrêt des oscillations se faisant pour cinq fois le temps caractéristique de l'amortissement, on obtient un temps caractéristique d'amortissements de l'ordre de 30 s. On peut donc supposer que ces frottements sont suffisamment faibles pour être négligeables sur une oscillation. Ils sont toutefois nécessaires pour que l'angle s'affaiblisse et que l'étude soit possible.



**Figure 5** - Recherche des maxima locaux et des angles correspondants (gauche).  
Évolution de la période en fonction de l'angle de lâcher (fictif).

Pour la réalisation de cette expérience, il y a donc un compromis à trouver entre un amortissement suffisamment faible pour que ses effets ne soient pas trop importants sur une période, et un amortissement suffisamment fort pour que l'acquisition ne dure pas trop dans le temps. En général, une liaison réalisée avec des roulements à billes permet de limiter suffisamment les frottements de liaison et l'amortissement sera alors dominé par l'action de l'air sur l'oscillateur. Ceci est confirmé par l'évolution exponentielle des maxima de l'angle en fonction du temps pour des angles inférieurs à  $120^\circ$  environ.

## 2.2. Comparaison aux modèles

L'évolution de la période expérimentale en fonction de l'angle de lâcher peut enfin être comparée aux modèles. Nous avons ici choisi un modèle sans frottement où les effets non linéaires sont pris en compte. Il n'existe pas de solution analytique de l'expression de la période en fonction de  $\theta_0$  mais une expression numérique qui peut être calculée avec la bibliothèque «quad» de «scipy.integrate» de *Python* voire la bibliothèque «ellipk» de «scipy.special» qui donne le résultat directement. C'est encore une intégrale que l'on peut éventuellement coder avec les étudiants avec la méthode de leur choix. L'expression de la période revient à calculer (voir [14] et annexe 2)

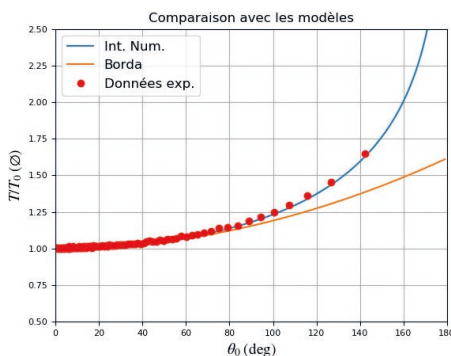
$$T = \frac{\sqrt{2} T_0}{\pi} \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0}}$$

avec  $T_0 = \sqrt{\frac{I}{mgOG}}$ , la période des petites oscillations du pendule pesant où  $I$  est le moment d'inertie du pendule,  $m$  sa masse totale et  $OG$  la distance entre le centre de masse du pendule pesant et l'axe de rotation.

Le développement limité de la période donne la formule analytique de Borda

$$T = T_0 \left( 1 + \frac{\theta_0^2}{16} \right).$$

Ces modèles s'accordent avec les relevés expérimentaux jusqu'à des angles de  $90^\circ$  pour le modèle de Borda et de  $140^\circ$  pour l'intégration numérique (cf. figure 6). L'écart entre les points expérimentaux et les modèles s'explique par le fait que la formule de Borda n'est valable que sur un domaine limité des angles de lâcher. Enfin, les données sont mieux ajustées par le modèle numérique si l'angle initial de lâcher est pris comme la moyenne des angles maxima obtenus sur une période  $\theta_{0,i} = \frac{\theta_{\max,i} + \theta_{\max,i+2}}{2}$  que par une prise en compte simple de chaque maximum  $\theta_{0,i} = \theta_{\max,i}$ .



**Figure 6** - Comparaison de la période mesurée et des modèles en fonction de l'angle de lâcher (fictif).

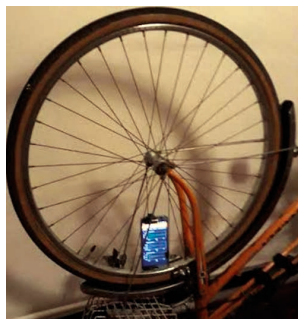


## CONCLUSION

Cette étude est une version plus moderne de l'expérience classique de l'évolution de la période d'un pendule en fonction de l'angle initial de lâcher. Elle utilise non seulement un smartphone en tant que capteur, mais également un langage de programmation pour éviter toute manipulation rébarbative.

Le portrait de phase et l'extraction de la période sont obtenus très rapidement ce qui permet une illustration quasi instantanée des non-linéarités d'une oscillation et une comparaison facile avec les modèles connus. En plus des phénomènes physiques étudiés, elle permet de donner quelques points de départ concrets pour l'utilisation de méthodes numériques : recherche de maxima, calculs d'intégrales...

Pour aller plus loin, les étudiants pourront essayer de vérifier la nature des frottements pour éventuellement les prendre en compte. Enfin, une possibilité de réalisation à moindre coût est l'utilisation d'une roue de vélo (cf. figure 7).



**Figure 7** - Même dispositif à moindre coût : la roue de vélo est déséquilibrée par le poids du smartphone... Attention toutefois à bien fixer le téléphone.

## REMERCIEMENTS

Nous remercions chaleureusement Rodolphe Boisgard, maître de conférences à l'Université de Bordeaux, pour ses conseils précieux et sa relecture attentive. Nous remercions également Guy Bouyrie et Jean-Michel Millet pour leurs remarques ayant permis de réaliser un meilleur ajustement des données expérimentales sans augmenter la complexité du code proposé.

## BIBLIOGRAPHIE ET NETOGRAPHIE

- [1] R. Feynman, R. Leighton et M. Sands, *Les cours de physique de Feynman*, Paris : Dunod, Les cours de référence, 1999.

- [2] R. Duffait, «Étude expérimentale des oscillateurs mécaniques», *Bull. Un. Prof. Phys. Chim.*, vol. 98 n° 867 (1), p. 1307-1338, octobre 2004.
- [3] M. Carrère et T. Chave, «Étude d'un pendule (into the Wii !)», *Bull. Un. Prof. Phys. Chim.*, vol. 105, n° 937, p. 1051-1057, octobre 2011.
- [4] J. Legoix, « $T/T_0$ », *Bull. Un. Prof. Phys. Chim.*, vol. 98, n° 864, p. 739-754, mai 2004.
- [5] A. Gibaud et T. Gibaud, «Étude des effets non linéaires observés sur les oscillations d'un pendule simple», *Bull. Un. Prof. Phys. Chim.*, vol. 101, n° 891, p. 167-176, février 2007.
- [6] La smartphonique : Utilisation du smartphone en sciences : <http://smartphonique.fr>
- [7] U. Delabre, *Expériences de physique avec un smartphone*, Paris : Dunod, 2019, p. 73-84.
- [8] Travaux pratiques de physique «Pendule simple», *Bull. Un. Prof. Phys. Chim.*, vol. 58, n° 472 (1), p. 38-39, septembre 1963.
- [9] J.-C. Castro-Palacio and *al.*, “Using a mobile phone acceleration sensor in physics experiments on free and damped harmonic oscillations”, *American Journal of Physics*, 81, 472, 2013.
- [10] M. Monteiro and *al.*, “Exploring phase space using smartphone acceleration and rotation sensors simultaneously”, *European Journal of Physics*, 35, 045013, 2014.
- [11] PhyPhox : Physical Phone Experiments : <https://phyphox.org/>
- [12] How to use the phyphox remote access : <https://youtu.be/mPUHCWypn9M>
- [13] Python : <https://www.python.org/>
- [14] P. Hinrichsen, “Review of approximate equations for the pendulum period”, *European Journal of Physics*, 42, 015005, 2021.

## Annexe 1

### Équation du mouvement et période des oscillations linéaires

Avec les paramètres de la figure 1, le théorème du moment cinétique sur l'axe  $Oz$  appliqué au système distribué {Tige + Nacelle + Smartphone}, de masse totale  $m$ , de centre d'inertie  $G$  et de moment d'inertie  $I$ , donne l'équation du mouvement sans frottement

$$I\ddot{\theta} = -mgOG \sin \theta.$$

Que l'on écrit sous forme normalisée

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin \theta = 0 \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{mgOG}{I}}.$$

L'équation ci-dessus est non linéaire. Si l'amplitude des oscillations est suffisamment faible, l'équation peut être linéarisée et on obtient l'équation du mouvement d'un oscillateur harmonique

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0 \quad \text{avec} \quad T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgOG}}.$$

## Annexe 2

### Expression de la période dans le cas non linéaire

Pour calculer la période pour un angle de lâcher  $\theta_0$ , on intègre l'équation du mouvement par rapport au temps

$$2\ddot{\theta} = -2\omega_0^2 \dot{\theta} \sin \theta$$

$$\dot{\theta}^2 = 2\omega_0^2 \cos \theta + \text{Cte.}$$

Avec, pour conditions initiales, un lâcher à  $\theta(t=0) = \theta_0$  sans vitesse initiale  $\dot{\theta}(t=0) = 0$ . Ainsi, en prenant la racine, on prendra garde au sens de variation de  $\dot{\theta}$  avec  $\theta$  (signe moins)

$$\frac{d\theta}{dt} = -\sqrt{2} \omega_0 \sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0}$$

soit en intégrant sur 1/4 de période

$$\begin{aligned} \frac{-d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0}} &= -\sqrt{2} \omega_0 dt \\ -\int_{\theta_0}^0 \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0}} &= \int_0^{T/4} \sqrt{2} \omega_0 dt \\ T &= \frac{2\sqrt{2}}{\omega_0} \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0}} \end{aligned}$$

$$T = \frac{\sqrt{2} T_0}{\pi} \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0}}.$$

## Annexe 3

### Expression de la période dans le cas faiblement non linéaire, formule de Borda

Si  $\theta \ll 1$ , un développement limité de l'intégrale précédente, faisant intervenir les fonctions elliptiques de Jacobi, ramène à la formule de Borda. On préfère ici faire un changement de variable de manière à éviter de faire un développement limité d'une intégrale impropre. On pose

$$\sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right) \sin(u) = \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad \text{et} \quad x = \sin^2\left(\frac{\theta_0}{2}\right).$$

D'où 
$$\frac{1}{2} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) d\theta = \sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right) \cos(u) du.$$

L'intégrale se réduit à 
$$T = \frac{T_0}{\pi} \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\sin^2\left(\frac{\theta_0}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}}$$

$$T = \frac{T_0}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{2 \sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos(u) du}{\sqrt{\sin^2\left(\frac{\theta_0}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\theta_0}{2}\right) \sin^2(u)}}$$

$$T = \frac{2T_0}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{du}{\sqrt{\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}} = \frac{2T_0}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{du}{\sqrt{1 - x \sin^2(u)}}.$$

En faisant un développement limité au premier ordre en  $x$  puis  $\theta_0$ , on arrive à

$$T = \frac{T_0}{\pi} \int_0^{\pi/2} \left(1 + \frac{x}{2} \sin^2 u\right) du = T_0 \left(1 + \frac{x}{4}\right)$$

$$T = T_0 \left(1 + \frac{1}{4} \sin^2\left(\frac{\theta_0}{2}\right)\right)$$

$$\boxed{T = T_0 \left(1 + \frac{1}{16} \theta_0^2\right)}.$$

Cette formule dite de Borda est donc un développement limité de l'intégrale numérique à calculer.

Habituellement, elle est plutôt retrouvée en conservant le terme cubique du déve-

loppement du sinus de l'équation du mouvement (oscillations faiblement non linéaires)

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \left( \theta + \frac{\theta^3}{3!} \right) = 0.$$

On suppose alors l'oscillation quasi sinusoidale  $\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega t)$  et on utilise la formule d'Euler pour linéariser à nouveau le terme cubique

$$\sin^3 x = \frac{3}{4} \sin x - \frac{1}{4} \sin 3x \approx \frac{3}{4} \sin x.$$

En injectant la solution harmonique dans l'équation du mouvement, on obtient

$$-\theta_0 \omega^2 + \omega_0^2 \left( \theta_0 - \frac{1}{6} \frac{3}{4} \theta_0^3 \right) = 0$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 \left( 1 - \frac{1}{8} \theta_0^2 \right).$$

Enfin, en linéarisant le résultat, on arrive à

$$\omega = \omega_0 \left( 1 - \frac{1}{16} \theta_0^2 \right) \quad \text{ou} \quad T = T_0 \left( 1 + \frac{1}{16} \theta_0^2 \right).$$

Cette démarche présente l'avantage d'être économique en termes de calcul, mais ne fait pas le lien avec le cas fortement non linéaire.

### Compléments de l'article

*Cet article comporte des compléments nommés :*

- ◆ *OscillationsNonlineaires\_ScriptBUP\_VF.py*
- ◆ *PortraitPhase\_Theta0\_180deg.csv*

*L'ensemble est disponible sur le site de l'UdPPC sous la forme d'un fichier zippé 10340573.*



**Cédric JAI**

*Professeur de physique*  
La Prépa des INP - Site de Bordeaux  
Talence (Gironde)



**Kévin CAIVEAU**

*Professeur de physique*  
La Prépa des INP - Site de Bordeaux  
Talence (Gironde)