

Projet Rétinac : voir le son

Partie 2 : la diffraction⁽¹⁾

par Jean-Christophe JOUAN, Yves CHRQUI,
Violette KUBIACZYK et Ambre DESHAYES

Lycée militaire de Saint-Cyr-l'École - 78210 Saint-Cyr-l'École
jean-christophe.jouan1@ac-versailles.fr
yves.chrqui@ac-versailles.fr

NOUS PROPOSONS UN MONTAGE qui traduit visuellement les phénomènes acoustiques, notamment la répartition de l'intensité acoustique dans l'espace. Il est ensuite utilisé pour visualiser et étudier les phénomènes d'interférences et de diffraction dans le domaine des ultrasons.

INTRODUCTION

Dans un précédent article [1], nous présentions la rétine acoustique développée par les élèves dans le cadre d'un projet présenté aux Olympiades de Physique France en 2019 [2] et son application à la visualisation et l'étude des phénomènes d'interférences dans le domaine acoustique ultrasonore. Nous revisitons dans cet article, quelques expériences classiques de diffraction et proposons des figures inédites dans le domaine de l'acoustique. Comme nous le verrons, la longueur d'onde des ultrasons permet d'étudier les phénomènes dans des régimes difficilement accessibles en optique. Après une présentation de la diffraction par un bord et des franges de Grimaldi, nous étudierons la diffraction par une ouverture circulaire dans le régime de diffraction de Fresnel. Nous mettrons alors en évidence un phénomène aussi surprenant que le point brillant de Poisson observé derrière un obstacle circulaire éclairé par une onde lumineuse.

1. LES FRANGES DE GRIMALDI

Le phénomène de diffraction se manifeste lorsqu'une onde rencontre un obstacle ou une ouverture dont les dimensions ne sont pas trop grandes devant sa longueur d'onde. Il se traduit par un éparpillement spatial de l'intensité acoustique derrière l'obstacle. Le phénomène se manifeste également quand l'onde rencontre un bord rectiligne. Ce sont les franges de Grimaldi (1618-1663), qui fut le premier à décrire dans le cas de la lumière le phénomène, auquel il donna le nom de diffraction.

(1) *NDLR* : la première partie de cet article est parue dans *Le Bup* n° 1021 de février 2020, p. 173-191.

1.1. Description de l'expérience

L'émetteur E (transducteur à ultrasons de fréquence $f = 40$ kHz) est placé devant le bord rectiligne d'une plaque métallique, à la distance d de celle-ci, et positionné dans le même plan horizontal que le microphone central de la barrette verticale de microphones. L'observation est faite à la distance D de la plaque. La barrette est déplacée dans la direction $(O'M)$ (cf. figure 1).

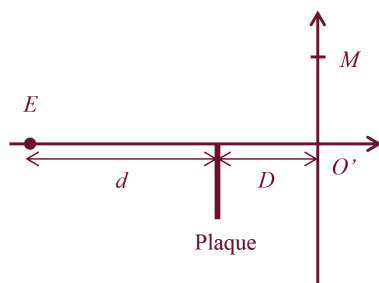


Figure 1 - Montage pour l'observation des franges de Grimaldi.

La distance d mesurée entre la face avant de l'émetteur et le bord de la plaque est fixée à $d = (22,0 \pm 0,1)$ cm⁽²⁾ et la distance D entre le bord diffractant et l'écran d'observation à $D = (4,0 \pm 0,2)$ cm. La barrette est déplacée sur une distance de 18,8 cm avec un pas de 4 mm. Nous obtenons les images de la figure 2, sans lissage (cf. figure 2A) qui révèle la position des microphones puis avec lissage (cf. figure 2B).

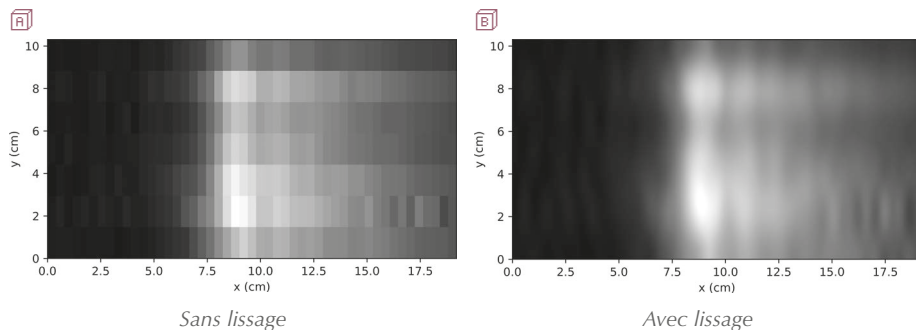


Figure 2 - Franges de Grimaldi ; $d = 22,0$ cm ; $D = 4,0$ cm. L'abscisse x repère la position de la barrette sur l'axe $(O'M)$ par rapport à sa position initiale (différente de O').

(2) Sauf mention contraire, les incertitudes sont des incertitudes majorées.

1.2. Résultats expérimentaux

La courbe de la figure 3 représente l'évolution de la valeur efficace mesurée par le microphone central en fonction de sa position repérée par son abscisse x . L'origine correspond à la position de la première mesure. La valeur efficace a été divisée par la plus grande valeur mesurée par le microphone lors de son déplacement.

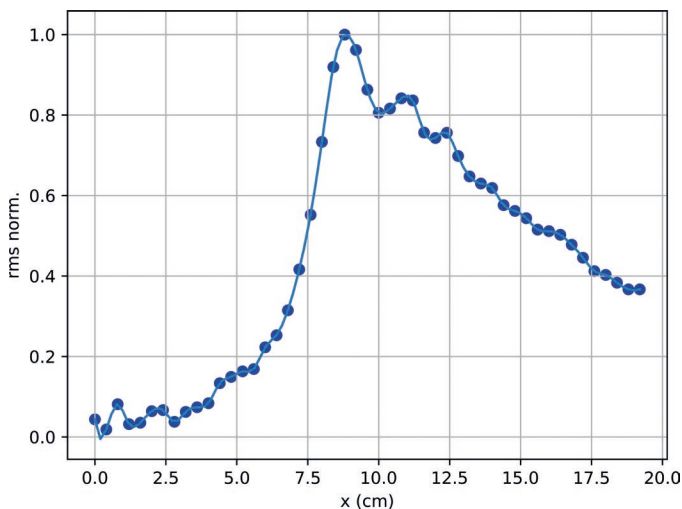


Figure 3 - Tension efficace normalisée en fonction de la position du microphone.

Les points expérimentaux ont ensuite été comparés à la courbe obtenue dans le cadre de la théorie de Fresnel [3-4] dont nous rappelons en annexe les hypothèses sous-jacentes ainsi que quelques résultats. L'amplitude $|A|$ de l'onde au point M d'abscisse x_M , dont l'origine O' est prise sur la droite joignant l'émetteur au bord de la plaque, est donnée par la relation (1) :

$$|A|^2 = \frac{|A_0|^2}{2} \left\{ \left[\frac{1}{2} - C \left(-x_M \sqrt{\frac{2d}{\lambda D(D+d)}} \right) \right]^2 + \left[\frac{1}{2} - S \left(-x_M \sqrt{\frac{2d}{\lambda D(D+d)}} \right) \right]^2 \right\}, \quad (1)$$

où C et S sont les intégrales de Fresnel.

Nous superposons sur la figure 4 (cf. page ci-après), aux points expérimentaux, la courbe théorique $|A|/|A|_{\max}$ que nous avons pris soin de recentrer sur la valeur $x = 7,1$ cm.

Nous retrouvons un profil de courbe similaire, caractéristique des franges de Grimaldi, bien que les conditions expérimentales ne respectent pas rigoureusement les approximations de Fresnel utilisées pour établir la relation (1), à savoir l'approximation de champ pas trop proche ($D \gg \lambda$) et l'approximation paraxiale ($D \gg x_M$).

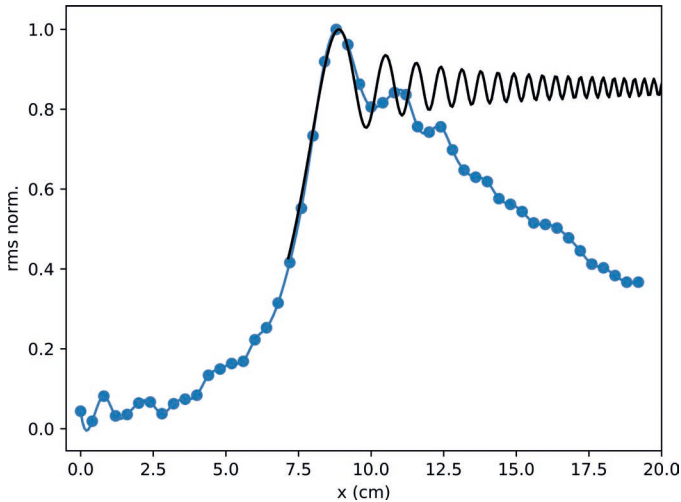


Figure 4 - Tension efficace normalisée en fonction de la position du microphone ; points expérimentaux et modélisation.

La relation (1) fait apparaître une longueur caractéristique i du phénomène et donc de l'interfrange des franges de Grimaldi, donnée par la relation (2), pour laquelle nous supposons pour simplifier $d \gg D$:

$$i = \sqrt{\frac{\lambda D}{2} \left(1 + \frac{D}{d}\right)} \approx \sqrt{\frac{\lambda D}{2}}. \quad (2)$$

L'interfrange i augmente avec la distance D d'observation. Observer le phénomène dans le cadre de l'approximation paraxiale ($i = \frac{D}{20}$ par exemple), nécessiterait de placer l'écran d'observation à une distance $D = 1,70$ m du bord diffractant. Remarquons que la condition $x_M \sim i \ll D$, implique nécessairement $\lambda \ll D$. En effet, d'après la relation (2), $\frac{i}{D} = \sqrt{\frac{\lambda}{2D}}$.

La courbe expérimentale montre par ailleurs une diminution de la valeur efficace, à mesure que l'on s'éloigne de la position $x = 7,1$ cm, que l'on peut attribuer au caractère étendu de la source d'émission, à l'atténuation des ultrasons dans l'air lors de leur propagation ainsi qu'à un effet d'atténuation dû à l'orientation des microphones [1]. Il conviendrait enfin de prendre en compte dans la modélisation l'anisotropie de l'émetteur et restreindre le calcul des intégrales de Fresnel au demi-disque correspondant à l'intersection du cône d'émission de l'émetteur par le bord diffractant.

2. DIFFRACTION PAR UNE OUVERTURE CIRCULAIRE

Nous nous sommes ensuite intéressés à la diffraction par des ouvertures circulaires

de diamètre $2a$ variable. L'émetteur E est placé à une distance d de l'ouverture et l'écran d'observation à une distance D de cette dernière (cf. figure 5).

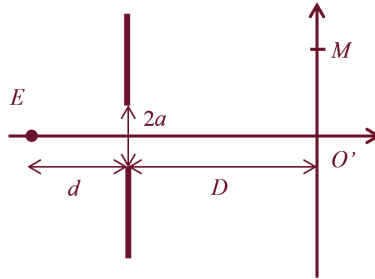


Figure 5 - Montage pour l'observation de la diffraction de Fresnel.

2.1. De la diffraction de Fresnel à la diffraction de Fraunhofer

Le régime de diffraction est gouverné par le nombre de Fresnel N_F :

$$N_F = \frac{a^2}{\lambda D}. \quad (3)$$

La diffraction de Fraunhofer, ou diffraction à l'infini ($D \rightarrow \infty$) correspond à des nombres de Fresnel $N_F \ll 1$.

La diffraction de Fresnel, ou diffraction à distance finie, correspond à des nombres de Fresnel de l'ordre de l'unité ou supérieurs à 1.

Notons que le cas $N_F \rightarrow \infty$ ($a \rightarrow \infty$ ou $\lambda \rightarrow 0$) correspond à la situation de l'optique géométrique et à l'absence de diffraction, pour laquelle nous observons sur l'écran un disque lumineux, interception par l'écran des rayons issus de E et passant par l'ouverture circulaire et désigné disque géométrique dans la suite. Partant de cette situation, à mesure que le nombre de Fresnel diminue, la figure de diffraction modifie tout d'abord la distribution de l'intensité lumineuse à l'intérieur du disque géométrique de l'ouverture diffractante (diffraction de Fresnel) puis s'étale fortement au-delà de ses bords (diffraction de Fraunhofer).

Calculons la valeur du nombre de Fresnel pour lequel la demi-largeur l_{Ff} de la figure de diffraction de Fraunhofer d'une ouverture circulaire est égale à la demi-largeur l_g du disque géométrique.

D'après la figure 5, la demi-largeur du disque géométrique est donnée par le théorème de Thalès :

$$\frac{d}{d + D} = \frac{a}{l_g}. \quad (4)$$

D'autre part, la demi-largeur de la figure de diffraction de Fraunhofer, dans le cas

d'une ouverture circulaire, correspond au rayon de la tache d'Airy, soit :

$$1,22 \frac{\lambda}{2a} \approx \frac{l_{Ff}}{D}. \quad (5)$$

Égalisons l_{Ff} et l_g , il vient :

$$a \frac{d+D}{d} = 1,22 \frac{\lambda D}{2a},$$

soit :

$$N_F = \frac{a^2}{\lambda D} = 0,61 \frac{d}{d+D}. \quad (6)$$

Les conditions expérimentales choisies dans la suite pour d et D (voir ci-dessous) sont telles que $N_F = 0,21$.

2.2. Résultats expérimentaux

Les figures de diffraction (cf. figure 6) ont été obtenues avec $d = (8,0 \pm 0,1)$ cm et $D = (15,0 \pm 0,2)$ cm et pour une ouverture circulaire dont le diamètre $2a$ varie de 3,0 cm à 6,0 cm, ce qui permet de faire varier le nombre de Fresnel. La position de l'émetteur résulte d'un compromis entre la nécessité d'éclairer la totalité de l'ouverture circulaire (diaphragme d'optique) et d'éviter une diffraction par les bords extérieurs du diaphragme. La barrette est déplacée sur une distance de 28,8 cm avec un pas de 8 mm dans la direction $(O'M)$ (cf. figure 5, page précédente).

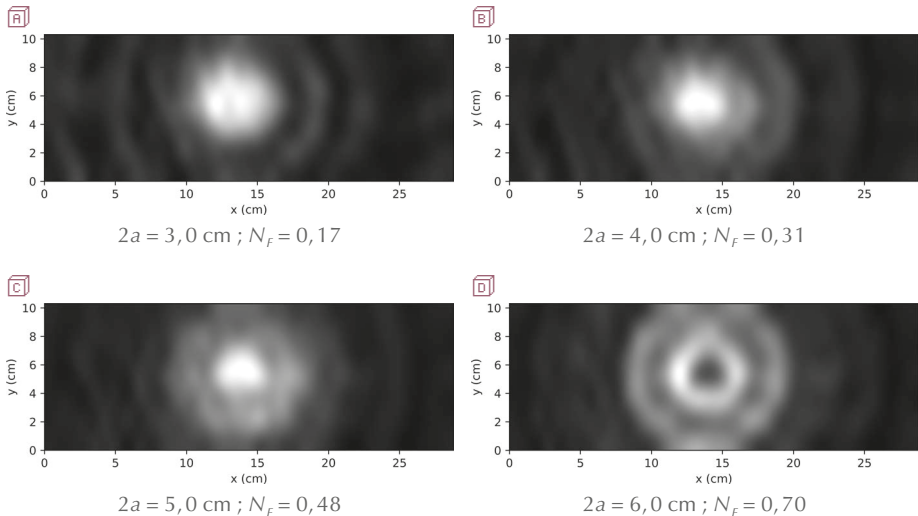


Figure 6 - Diffraction par une ouverture circulaire de diamètre $2a$ variable ; $d = 8,0$ cm ; $D = 15,0$ cm ; l'abscisse x repère la position de la barrette par rapport à sa position initiale.

2.3. Interprétation

Les courbes de la figure 7 représentent l'évolution de la valeur efficace mesu-

rée par le microphone central en fonction de sa position repérée par son abscisse x . L'origine correspond à la position de la première mesure. La valeur efficace a été divisée par la plus grande valeur mesurée par le microphone lors de son déplacement. Nous avons également reporté sur chacune des courbes la largeur l_g du disque géométrique de l'ouverture donnée par la relation (4).

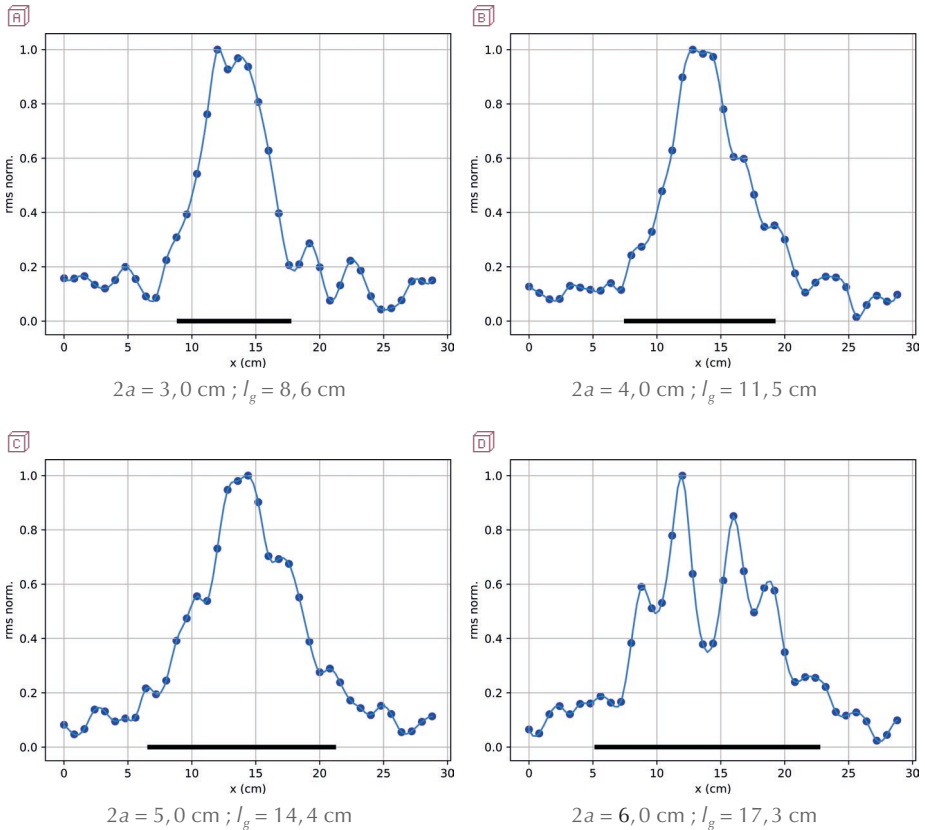


Figure 7 - Tension efficace normalisée en fonction de la position du microphone et largeur du disque géométrique (trait noir) ; $d = 8,0 \text{ cm}$; $D = 15,0 \text{ cm}$.

La figure 6D associée à la courbe 7D, correspondant à $N_F = 0,70$, montre un résultat surprenant à savoir l'apparition d'une tache sombre au centre de la figure de diffraction, qui correspond à un minimum d'intensité d'acoustique. Ce résultat prédit par la théorie de Fresnel, s'observe sur l'axe d'une ouverture circulaire pour des distances D_n qui vérifient la relation (7) comme le montrent les calculs en annexe :

$$D_n = \frac{1}{\frac{2n\lambda}{a^2} - \frac{1}{d}}, \quad (7)$$

où n est un entier naturel non nul. Pour $n = 1$, $2a = 6$ cm, nous obtenons une distance théorique $D_1 = 15,6$ cm, avec une incertitude majorée égale à $\pm 1,8$ cm en accord avec le résultat expérimental : $D = (15,0 \pm 0,2)$ cm, et ce malgré la faiblesse de l'approximation $a \ll d$ utilisée pour mener les calculs.

Cette observation n'est pas sans rappeler un phénomène connu en optique sous le nom de point brillant de Poisson qui s'observe, dans le régime de diffraction de Fresnel, sur l'axe d'un disque opaque éclairé par une onde lumineuse.

CONCLUSION

La rétine acoustique nous a permis, à l'aide d'images inédites dans le domaine de l'acoustique, de revisiter quelques expériences classiques de diffraction et de mettre en évidence des phénomènes difficilement observables dans le domaine optique, car relevant de la diffraction de Fresnel. Nous avons ainsi pu observer la présence d'une tache sombre au centre de la figure de diffraction d'une ouverture circulaire, correspondant à un minimum d'intensité acoustique. Le phénomène pourrait trouver des applications dans la conception de dispositifs visant à la réduction du bruit acoustique. Un aspect original de l'article est la prise en compte du caractère sphérique de l'onde incidente pour interpréter théoriquement la position de ces minimums d'intensité acoustique.

Il y a tout juste deux cents ans, Augustin Fresnel présentait son mémoire sur la nature ondulatoire de la lumière devant l'Académie des sciences. Suivant ses pas, nous avons redécouvert dans cet article et le précédent [1] quelques-uns de ses résultats dans le domaine acoustique ultrasonore.

Annexe

Calculs en diffraction de Fresnel

1. LES HYPOTHÈSES DU CALCUL

Considérons la situation de la figure 8 où S est une source ponctuelle, placée sur l'axe (Oz) en $z = -d$, émettant une onde sphérique de longueur d'onde λ . Dans le plan (Π) d'équation $z = 0$ se trouve une ouverture ou un obstacle diffractant et nous cherchons à calculer l'amplitude de l'onde en tout point M du plan situé en $z = D$.

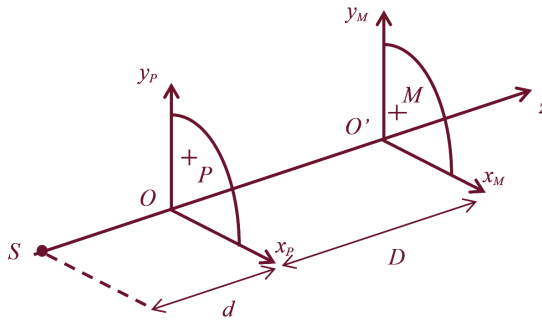


Figure 8 - Notations utilisées pour l'étude de la diffraction de Fresnel.

Dans le cadre de la théorie de Rayleigh-Sommerfeld, l'amplitude complexe de l'onde au point M se calcule rigoureusement à partir de l'amplitude complexe de l'onde en tout point P du plan (Π), par la première formule de Rayleigh-Sommerfeld [5] :

$$\underline{A}(M) = -\frac{i}{\lambda} \iint_{P \in (\Pi)} \underline{A}(P) \cos(\theta) \times \frac{1}{ik} \times \frac{d}{dPM} \left(\frac{e^{ikPM}}{PM} \right) d^2 S(P), \quad (8)$$

où $\theta = (Oz, PM)$.

1.1. Hypothèse de champ pas trop proche

Dans la zone de champ pas trop proche ($PM \gg \lambda$), nous pouvons simplifier l'intégrale précédente et écrire :

$$\underline{A}(M) = -\frac{i}{\lambda} \iint_{P \in (\Pi)} \underline{A}(P) \times \cos(\theta) \times \frac{e^{ikPM}}{PM} d^2 S(P).$$

Compte tenu du fait que $\cos(\theta) = \frac{D}{PM}$, cette intégrale s'écrit aussi :

$$\underline{A}(M) = -\frac{i}{\lambda} \iint_{P \in (\Pi)} \underline{A}(P) \frac{D}{PM^2} e^{ikPM} d^2 S(P). \quad (9)$$

1.2. Hypothèse de champ donné

Nous supposons connue en tout point du plan (Π) l'amplitude complexe $\underline{A}(P)$ que nous assimilons à l'amplitude de l'onde incidente issue de S en l'absence d'écran diffractant, ce qui revient à admettre que l'écran ne perturbe pas l'onde incidente, soit :

$$\underline{A}(P) = \frac{A_S}{SP} e^{ikSP}.$$

1.3. Approximation paraxiale

Dans le cadre de l'approximation de Fresnel, nous supposons maintenant que P reste au voisinage de O ($OP \ll d, D$) et M au voisinage de O' ($O'M \ll D$) ce qui permet d'approximer les expressions de SP et PM :

$$SP \approx d \left(1 + \frac{x_p^2}{2d^2} + \frac{y_p^2}{2d^2} \right),$$

$$PM \approx D \left(1 + \frac{(x_M - x_p)^2}{2D^2} + \frac{(y_M - y_p)^2}{2D^2} \right).$$

Dans ces conditions, l'intégrale précédente limitée à la portion (Π_1) du plan (Π) pour laquelle le facteur de transmission est égal à 1, s'écrit :

$$\underline{A}(M) = -\frac{i}{\lambda} \iint_{P \in (\Pi_1)} \frac{A_S e^{ikd \left(1 + \frac{x_p^2}{2d^2} + \frac{y_p^2}{2d^2} \right)}}{d} \frac{e^{ikD \left(1 + \frac{(x_M - x_p)^2}{2D^2} + \frac{(y_M - y_p)^2}{2D^2} \right)}}{D} dx_p dy_p. \quad (10)$$

L'introduction des variables réduites X et Y telles que

$$\frac{X}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{D+d}{\lambda d D}} \left(x_p - \frac{d}{D+d} x_M \right),$$

$$\frac{Y}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{D+d}{\lambda d D}} \left(y_p - \frac{d}{D+d} y_M \right),$$

permet de réécrire l'intégrale précédente sous la forme suivante, en notant $\Pi_1(X, Y)$ le nouveau domaine d'intégration :

$$\underline{A}(M) = -\frac{i}{2(D+d)} A_S e^{ik(d+D)} \left(1 + \frac{x_M^2 + y_M^2}{2(D+d)^2} \right) \iint_{\Pi_1(X, Y)} e^{i\frac{\pi}{2}(X^2 + Y^2)} dXdY, \quad (11)$$

où l'on reconnaît l'amplitude complexe $\underline{A}_0(M)$ au point M de l'onde issue de S en l'absence d'écran diffractant, dans le cadre de l'approximation de Fresnel :

$$\underline{A}(M) = -\frac{i}{2} \underline{A}_0(M) \iint_{\Pi_1(X, Y)} e^{i\frac{\pi}{2}(X^2 + Y^2)} dXdY. \quad (12)$$

2. DIFFRACTION PAR UN BORD RECTILIGNE

Dans le cas de la diffraction par le bord rectiligne d'une plaque opaque occupant

le demi-plan où $x < 0$, situé en $z = 0$, il vient⁽³⁾ :

$$\underline{A}(M) = -\frac{i}{2} \underline{A}_0(M) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\frac{\pi}{2} X^2}}{\sqrt{\lambda D(D+d)}^{x_M}} dX \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\frac{\pi}{2} Y^2} dY. \quad (13)$$

Introduisons les intégrales de Fresnel $C(\omega)$ et $S(\omega)$

$$C(\omega) = \int_0^\omega \cos\left(\pi \frac{X^2}{2}\right) dX,$$

$$S(\omega) = \int_0^\omega \sin\left(\pi \frac{X^2}{2}\right) dX,$$

qui tendent chacune vers $\frac{1}{2}$ quand ω tend vers l'infini. Nous retrouvons ainsi l'amplitude complexe correspondant à la relation (1) :

$$\underline{A}(M) = -\frac{i}{2} \underline{A}_0(M) \left[\left(\frac{1}{2} - C\left(-x_M \sqrt{\frac{2d}{\lambda D(D+d)}}\right) \right) + i \left(\frac{1}{2} - S\left(-x_M \sqrt{\frac{2d}{\lambda D(D+d)}}\right) \right) \right] \times (1+i). \quad (14)$$

3. DIFFRACTION SUR L'AXE D'UNE OUVERTURE CIRCULAIRE

Dans le cas de la diffraction sur l'axe d'une ouverture circulaire de rayon a , l'intégrale (10) se réécrit :

$$\underline{A}(M) = -\frac{i}{\lambda d D} A_S e^{ik(d+D)} \iint_{P \in (\Pi_1)} e^{ik\left(\frac{1}{2d} + \frac{1}{2D}\right)(x_p^2 + y_p^2)} dx_p dy_p.$$

Après un premier changement de variable : $\rho^2 = x_p^2 + y_p^2$,

$$\underline{A}(M) = -\frac{i}{\lambda d D} A_S e^{ik(d+D)} \int_0^a e^{ik\left(\frac{1}{2d} + \frac{1}{2D}\right)\rho^2} 2\pi\rho d\rho.$$

Puis un second : $s = k\left(\frac{1}{2d} + \frac{1}{2D}\right)\rho^2$, il vient :

$$\underline{A}(M) = -\frac{i}{d+D} A_S e^{ik(d+D)} \int_0^{k\left(\frac{1}{2d} + \frac{1}{2D}\right)a^2} e^{is} ds, \quad (15)$$

où l'on reconnaît l'amplitude complexe $\underline{A}_0(M)$ au point M de l'onde issue de S en l'absence d'écran diffractant :

$$\underline{A}(M) = -i \underline{A}_0(M) \int_0^{k\left(\frac{1}{2d} + \frac{1}{2D}\right)a^2} e^{is} ds, \quad (16)$$

$$\underline{A}(M) = -i \underline{A}_0(M) \left[\frac{e^{is}}{i} \right]_0^{k\left(\frac{1}{2d} + \frac{1}{2D}\right)a^2},$$

(3) Il semble contradictoire d'étendre l'intégrale de $-\infty$ à $+\infty$, alors que nous supposons P au voisinage de O . Il s'avère que la contribution de l'intégrande aux intégrales de Fresnel devient rapidement négligeable pour $X > 1$.

$$\underline{A}(M) = -\underline{A}_0(M) \left(e^{ik\left(\frac{1}{2d} + \frac{1}{2D}\right)a^2} - 1 \right). \quad (17)$$

Le module de l'amplitude complexe est, alors donné par :

$$|\underline{A}(M)| = |\underline{A}_0(M)| \left| e^{ik\left(\frac{1}{2d} + \frac{1}{2D}\right)a^2} - 1 \right|.$$

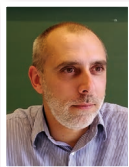
Le module $|e^{i\theta} - 1|$ représente la distance entre les points d'affixe $e^{i\theta}$ et 1. Cette distance passe par un minimum nul, pour les angles $\theta = 2n\pi$ où n est un entier naturel, ce qui conduit aux positions D_n des points de l'axe de l'ouverture pour lesquels l'amplitude est nulle :

$$k\left(\frac{1}{2d} + \frac{1}{2D_n}\right)a^2 = 2n\pi, \quad (18)$$

$$D_n = \frac{1}{\frac{2n\lambda}{a^2} - \frac{1}{d}}. \quad (19)$$

BIBLIOGRAPHIE ET NETOGRAPHIE

- [1] J.-Ch. Jouan, Y. Chriqui, V. Kubiacyk et A. Deshayes, «Projet Rétinac : voir le son - Partie 1 : Les interférences acoustiques», *Bull. Un. Prof. Phys. Chim.*, vol. 114, n° 1021, p. 173-191, février 2020.
- [2] https://odpf.org/images/archives_docs/26eme/memoires/EquipeY/memoire.pdf
- [3] ENS Cachan, «Étude de la diffraction de Fresnel dans quelques cas simples» : <http://www.physique.ens-cachan.fr/laboratoire/experiences/fichiers/DiffractionFresnel.pdf>
- [4] C. Simon, «Des franges de Grimaldi à la télémétrie laser : réflexions sur la diffraction de la lumière et son enseignement au lycée», *Bull. Un. Prof. Phys. Chim.*, vol. 112, n° 1003, p. 621-653, avril 2018.
- [5] L. Dettwiller, C. Mulet-Marquis et T. Robin, «Comparaison de techniques de calcul de diffraction - Partie 1 : Application aux réseaux zonés et à leur apodisation longitudinale», *Bull. Un. Prof. Phys. Chim.*, vol. 112, n° 1007, p. 1079-1112, octobre 2018.
- [6] L. Dettwiller, C. Mulet-Marquis et T. Robin, «Comparaison de techniques de calcul de diffraction - Partie 2 : Étude expérimentale», *Bull. Un. Prof. Phys. Chim.*, vol. 112, n° 1008, p. 1221-1235, novembre 2018.



Jean-Christophe JOUAN
Professeur en MPSI
 Lycée militaire de Saint-Cyr-l'École
 Saint-Cyr-l'École (Yvelines)



Yves CHRIQUI
Professeur de sciences physiques
 Lycée militaire de Saint-Cyr-l'École
 Saint-Cyr-l'École (Yvelines)



Violette KUBIACZYK

Élève en terminale S

Lycée militaire de Saint-Cyr-l'École
Saint-Cyr-l'École (Yvelines)



Ambre DESHAYES

Élève en terminale S

Lycée militaire de Saint-Cyr-l'École
Saint-Cyr-l'École (Yvelines)